Теория чисел

1. Три натуральных числа таковы, что последняя цифра суммы любых двух из них является последней цифрой третьего числа. Произведение этих трех чисел записали на доске, а затем все, кроме трех последних цифр этого произведения, стерли. Какие три цифры могли остаться на доске?

2. Натуральное число m таково, что сумма цифр в десятичной записи числа 2^m равна 8. Может ли при этом последняя цифра числа 2^m быть равной 6?

3. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных многочленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трехчлен при $x = 1$ принимать значение 2009?

4. Докажите, что для любых натуральных чисел $a > 1$ и k найдется натуральное n, для которого число $k \cdot a^n + 1$ — составное.

5. Найдите все пятизначные числа, состоящие из ненулевых цифр, такие, что, каждый раз зачеркивая первую цифру, мы получаем делитель предыдущего числа. (Пусть изначально было $\overline{abcde}$. Тогда выполняется $\overline{abcde} \vdots \overline{bcde}$, $\overline{bcde} \vdots \overline{cde}$, $\overline{cde} \vdots \overline{de}$, $\overline{de} \vdots e$.)

6. В автобусной ленте миллион билетов с номерами от 000000 до 999999. Фиолетовым цветом закрашены билеты, у которых сумма цифр на четных местах равна сумме цифр на нечетных местах. Каково наибольшее расстояние между двумя соседними фиолетовыми билетами?

7. Натуральное число b назовем *удачным*, если для любого натурального a такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество удачных натуральных чисел, меньших 2018.

8. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечетном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.