

Теория цифр

1. Натуральное число даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 125. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде десятков?
2. Для каждого четырёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех четырёхзначных чисел, складываем. Сколько получится?
3. Петя загадал натуральное число N , Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N + 1$, затем сумму цифр числа $N + 2$ и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?
4. Существует ли целое положительное число n такое, что все его цифры (в десятичной записи) больше 5, а все цифры числа n^2 меньше 5?
5. Числа 2^{2022} и 5^{2022} выписали одно за другим. Сколько цифр получилось?
6. (а) Пусть n — нечётное натуральное число, не кратное 5. Докажите, что найдётся число, состоящее только из единиц и кратное n .
(б) Докажите, что для любого n найдётся число с суммой цифр n , делящееся на n , в десятичной записи которого есть только цифры 0 и 1.
(в) При каких натуральных n для всякого натурального $k > n$ найдётся число с суммой цифр k , кратное n ?
7. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Может ли сумма цифр числа n^3 равняться 100^3 ?
8. (а) Существует ли 2022-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2022 разных 2022-значных полных квадратов?
(б) Назовём *усложнением* числа приписывание к нему одной цифры в начало, в конец или между любыми двумя его цифрами. Существует ли натуральное число, из которого невозможно получить полный квадрат с помощью ста усложнений?