Степени 2.

1. Выберем из всех чисел на произвольном отрезке произвольное число, которое делится на максимальную степень 2. Докажите, что может быть выбрано ровно одно такое число.
2. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
3. Пусть $k(n)$ — наибольший нечетный делитель n. Чему равна сумма $k(m+1)+\ldots+k(2m)$?
4. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c. Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.
5. Может ли сумма ста последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, быть равна сумме нескольких последовательных натуральных чисел, начиная с 1?
6. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных числе не являлась степенью двойки?
7. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?
8. Чему равна сумма $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$?
9. Докажите, что в любом многоугольнике можно выбрать две стороны так, что их длины либо равны, либо отношение большей длины к меньшей меньше двух.
10. а) Найдите наибольшее натуральное n, при котором $150!$ делится нацело на 2^n.
    б) Может ли число $n!$ делиться на 2^n?
11. Докажите неравенство $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{1024}>5$.

Домашнее задание

12. Докажите, что число $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ не может быть целым.

Степени 2.

1. Выберем из всех чисел на произвольном отрезке произвольное число, которое делится на максимальную степень 2. Докажите, что может быть выбрано ровно одно такое число.
2. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
3. Пусть $k(n)$ — наибольший нечетный делитель n. Чему равна сумма $k(m+1)+\ldots+k(2m)$?
4. Даны три попарно различных натуральных числа a, b, c. Докажите, что число $(a+b)(b+c)(c+a)$ не может быть степенью двойки.
5. Может ли сумма ста последовательных степеней двойки, начиная с некоторой, быть равна сумме нескольких последовательных натуральных чисел, начиная с 1?
6. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных числе не являлась степенью двойки?
7. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?
8. Чему равна сумма $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}$?
9. Докажите, что в любом многоугольнике можно выбрать две стороны так, что их длины либо равны, либо отношение большей длины к меньшей меньше двух.
10. а) Найдите наибольшее натуральное n, при котором $150!$ делится нацело на 2^n.
    б) Может ли число $n!$ делиться на 2^n?
11. Докажите неравенство $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{1024}>5$.

Домашнее задание

12. Докажите, что число $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ не может быть целым.