

Рациональность и иррациональность.

Определение. Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p — некоторое целое, q — натуральное число. Действительные числа, которые не являются рациональными, называются иррациональными.

Определение. Периодическая дробь — это бесконечная десятичная дробь, в которой, начиная с некоторого места цифры образуют периодическую последовательность. Периодическая дробь с целой частью A , предпериодом a_1, \dots, a_k и периодом $b_1 \dots b_n$ обозначается: $A, a_1 \dots a_k (b_1 \dots b_n)$.

- Докажите, что сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел также является рациональным числом (кроме случая, когда возникает деление на ноль).
- $x = 0$, (2). Найдите а) $10x$; б) $9x$.
- $x = 3$, (14). Найдите $99x$.
- Представьте в виде обыкновенной дроби: а) 0 , (3); б) 0 , (1); в) 15 , (68); г) $3,6(41)$; д) 0 , (9).
- Докажите, что любая периодическая дробь является рациональным числом.
- Докажите, что любое рациональное число $\frac{p}{q}$ представляется в виде конечной десятичной или периодической дроби, причём если дробь периодическая, то её период не превосходит $q - 1$.
- а) Докажите, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.
б) Докажите, что для натурального \sqrt{n} является рациональным числом тогда и только тогда, когда n — квадрат целого числа.
- Рациональными или иррациональными являются следующие числа:
а) $0,101001000100001\dots$; б) $0,123456789101112131415\dots$?
- Докажите, что на любом отрезке числовой прямой (сколь угодно малом) обязательно есть
а) рациональное число; б) иррациональное число.
- Может ли иррациональное число в иррациональной степени быть рациональным?
- После запятой выписали степени 2021 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?

Домашнее задание

- Назовем самой редкой цифрой числа любую из цифр, встречающихся в его десятичной записи не большее число раз, чем все остальные цифры. (В частности, если какие-то цифры в записи числа не встречаются, то самая редкая цифра — одна из них.) Саша составляет бесконечную последовательность цифр по такому правилу: на k -тое место он ставит любую из самых редких цифр числа k . Может ли Саша получить последовательность, периодическую с некоторого места?

Корни и иррациональность.

- Иррациональны ли
а) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt[7]{1 + \sqrt[5]{\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}}}$; г) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} + 2\sqrt{6}$; д) $\sqrt{17 - 4\sqrt{9 + 4\sqrt{5} + \sqrt{5}}}$.
- Вычислите $\sqrt{n + 508} + \sqrt{n}$, если известно, что это число рациональное и что n — натуральное.
- Существуют ли иррациональные числа x и y такие, что числа $x + y^2$ и $x + 2y$ рациональные?
- Вычислите $\frac{1}{10 - \sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{99} - \sqrt{98}} + \frac{1}{\sqrt{98} - \sqrt{97}} - \dots + \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$
- Докажите, что если $(a + b\sqrt{p})^n = A_n + B_n\sqrt{p}$, где p — натуральное число, не являющееся квадратом, а числа a, b, A_n, B_n — рациональны, то $(a - b\sqrt{p})^n = A_n - B_n\sqrt{p}$.
- Найдите первые 1000 знаков после запятой у следующих чисел
а) $(6 + \sqrt{35})^{1999}$; б) $(6 + \sqrt{37})^{2000}$; в) $(6 + \sqrt{39})^{1999}$.
- а) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?
б) То же самое, только Олег вписывал произведения вместо сумм.
- Числовое множество M , содержащее 2021 различных чисел, таково, что для любых двух различных элементов a, b из M число $a^2 + b\sqrt{2}$ рационально. Докажите, что любого A из M число $A\sqrt{2}$ рационально.
- Числа a, b удовлетворяют равенству $a^2b^2(a^2b^2 + 4) = 2(a^6 + b^6)$. Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.
- Докажите, что $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

Домашнее задание

- Числа x, y, z таковы, что все три числа $x + yz, y + zx$ и $z + xy$ рациональны, а $x^2 + y^2 = 1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.