

Окружности-2. Вписанные четырехугольники.

1. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN . Докажите, что если $\angle CAM = \angle CBN$, то $AC = BC$.
2. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На диагоналях AC и BD отметили точки K и L так, что точки B, C, K, L лежат на одной окружности. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.
3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C . Докажите, что точки O_1, O_2, B, C лежат на одной окружности.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. AL – биссектриса треугольника ABC , K – точка на стороне AC такая, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P . Докажите, что $AP = PL$.
6. **Теорема Микеля.** Пусть формально ABC – треугольник с произвольными точками A', B' и C' соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C', A'BC'$, и $A'B'C$. Докажите, что эти три окружности пересекутся в одной точке M , называемой точкой Микеля. *Постройте пересечение двух окружностей и рассмотрите оставшийся четырехугольник.*
7. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5, BC = 6, AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD . Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Докажите, что точки D, E, F, G лежат на одной окружности.
9. Точка O – центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K – точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.

Домашнее задание

1. а) Бильярд имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$. Из точки K стороны AB выпустили бильярдный шар, который отразился в точках L, M, N от сторон BC, CD, DA , возвратился в точку K и вновь вышел на траекторию $KLMN$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.
б) У четырехугольника $ABCD$ провели все биссектрисы углов и получился четырехугольник. Докажите, что он вписанный.

Окружности-2. Вписанные четырехугольники.

1. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN . Докажите, что если $\angle CAM = \angle CBN$, то $AC = BC$.
2. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный. На диагоналях AC и BD отметили точки K и L так, что точки B, C, K, L лежат на одной окружности. Докажите, что прямые KL и AD параллельны.
3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B . Луч O_2A пересекает первую окружность в точке C . Докажите, что точки O_1, O_2, B, C лежат на одной окружности.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на основании AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. AL – биссектриса треугольника ABC , K – точка на стороне AC такая, что $CK = CL$. Прямая KL и биссектриса угла B пересекаются в точке P . Докажите, что $AP = PL$.
6. **Теорема Микеля.** Пусть формально ABC – треугольник с произвольными точками A', B' и C' соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C', A'BC'$, и $A'B'C$. Докажите, что эти три окружности пересекутся в одной точке M , называемой точкой Микеля. *Постройте пересечение двух окружностей и рассмотрите оставшийся четырехугольник.*
7. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5, BC = 6, AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите длину отрезка KL .
8. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CD . Различные точки F и G на стороне AC таковы, что $DF \parallel BC$ и $EG \parallel AB$. Докажите, что точки D, E, F, G лежат на одной окружности.
9. Точка O – центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K – точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.
10. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.

Домашнее задание

1. а) Бильярд имеет форму выпуклого четырехугольника $ABCD$. Из точки K стороны AB выпустили бильярдный шар, который отразился в точках L, M, N от сторон BC, CD, DA , возвратился в точку K и вновь вышел на траекторию $KLMN$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ можно вписать в окружность.
б) У четырехугольника $ABCD$ провели все биссектрисы углов и получился четырехугольник. Докажите, что он вписанный.