Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 9 класс. 1 группа

1. Графы. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любооой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

2. Сильно связный граф. Компоненты сильной связности. Докажите, что граф не является сильно связным тогда и только тогда, когда можно покрасить вершины в синий и красный цвет, ттобы из синих вершин не вело рёбер в красные.

3. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что:
a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G)+1$.

4. Пусть $n > 2, a_1, \ldots, a_n$ - максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1)+d_G(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

5. а)В графе для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u)+d_G(v) \geqslant v(G)-1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.
б) Для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u)+d_G(v) \geqslant v(G)$ Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

6. Пусть $v(G) = n$, а $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n-$ последовательность степеней вершин графа G. Пусть $d_i + d_{n-i} \geqslant n$ для каждого $i \in [1, \ldots, n]$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

7. а) Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе есть гамильтонов цикл. Указание. Рассмотрите цикл наибольшей длины. б) Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе на n вершинах есть циклы любой длины от 3 до n. в) Даны натуральные числа $n > m > 1$. В полном n-вершинном оринтированном графе нет циклов из $m+1$ вершины. Докажите, что вершины этого графа можно так занумеровать числами от 1 до n, что при любых i, k, удовлетворящих условию $i \geqslant k+m-1$ ребро направлено из i-ой вершины в k-Ю.

8. В первый день 2^n школьников итрали в пинг-понг "навылет": сначала сытрали двое, затем победитель сыграл с третьим, победитель этой пары - с четвёртым и т.д., пока не сыграл последний школьник (ничьих в пингпонге не бывает). Во второй день те же школьники разыграли кубок: сначала произвольно разбились на пары и сыграли в парах, проиравшие выбыли, а победители снова произвольно разбились на пары и сыграли в парах, и т.д. Оказалось, что наборы итравших пар в первый и во второй день были одни и те же (возможно, победители были другие j. Н айдите наибольшее возможное значение n.

9. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных числе не являлась степенью двойки?

10. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

11. Докажите, что в любом многоугольнике можно выбрать две стороны так, что их длины либо равны, либо отношение большей длины к меньшей меньше двух.

12. Может ли число $n!$ делиться на 2^n?

13. Докажите неравенство $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{1024} > 5$.

14. Докажите, что среди чисел вида $\left[2^k\sqrt{2}\right]$ есть бесконечно много составных.

15. Дано n попарно взаизно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.

16. Можно ли при каком-то натуральном k разбить все натуральные числа от 1 до k на две группы и выписать числа в каждой группе подряд в некотором порядке так, чтобы получились два одинаковых числа?

17. Петя записал на доске в ряд n целых чисел. Докажите, что Васяможет выбрать несколько подряд идущих чисел (возможно, одно) таких, что их сумма делится на n.

18. Сумма 100 натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел с суммой 100.

19. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечётное число s, не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на s.

20. Существует ли 2017-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2017 разных 2017-значных точных квадратов?

21. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?

22. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы никакое из выбранных чисел не делилась на другое выбранное?

23. На какое наименьшее количество групп можно разбить числа от 1 до 2020 так, чтобы среди чисел одной группы ни одно из чисел не делилось ни на какое другое?

24. В ячейки куба $11 \times 11 \times 11$ поставлены по одному числа $1, 2, \ldots, 1331$. Из одного углового кубика в противоположный угловой отирравляются два червяка. Каждый из них может проползать в соседиий по грани кубик, при этом первый может проползать, если число в соседнем кубике отличается на 8, второй - если отличается на 9. Существует ли такая расстановка чисел, что оба червяка смогут добраться до противоположного углового кубика?

25. Вася поставил фишку на какую-то клетку доски 11×11. За один ход Вася передвигает финку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое налбольшее количество клеток Вася может посетить такими ходами, если пельзя наступать на одну Клетку дважды?

26. Коля и Дима играют в игру на доске 8×8, делая ходы по очереди, начинает а) Дима б) Коля . Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками 1×2 (доминошками) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т. е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой две соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрынную стратегию?

27. В одной пз вершин куб?а сидят N бабочек, остальные вершины пустые. Каждую минуту с одной из вершин куб?є по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна - в противоположную (относительно дентра) вершину, и еще одна - улетает вдаль и больше не возвращается. Найдите все значения N, при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.

28. Полуинвариант. В клетках таблицы 99×99 расставлены действительные числа. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток сумма отрицательна, разрешается в этом прямоугольнике поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом таком прямоугольнике будет неотрицательной.

29. Есть 10 различных чисел (возможно, нецелых). За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.
а) Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?
б) Может ли процесс продолжаться бесконечно?

30. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка"состоит лишь из одной карты,

то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

31. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «10» заменять на набор цифр «0111». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

32. На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.

33. На доске было записано уравнение $x^2+10x+20=0$. К доске поочерёдно подходили школьники, стирали либо второй коэффициент, либо свободный член и заменяли его на число, отличающееся ровно на 1. В результате оказалось записано уравнение $x^2+20\mathrm{x}+10=0$. Докажите, что в какой-то момент на доске было записано уравнение с целыми корнями.

34. На доске написан многочлен $x^2+x+2018$. Вася и Петя ходят по очереди, начинает Петя. Петя каждым ходом должен увеличить или уменьшить коэффициент при на 1 , а Вася каждым ходом должен увеличить или уменьшить свободный член на 1. Петя выиграет, если в какой-то момент у многочлена будет целый корень. Докажите, что Вася не сможет помешать ему выиграть.

35. Функция. Непрерывная функция. Теорема о промежуточном значении.

36. Пусть α- корень уравнения x^2+px+q, а β - корень уравнения x^2-px-q. Докажите, что между α и β есть корень уравнения $x^2-2px-2q$.

37. Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.

38. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на R и уравнение $f(x)=x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x))=x$ также не имеет корней.

39. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и её множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x)=x$ имеет хотя бы один корень.

40. Многочлен. Теорема Безу.

41. Докажите, что у многочлена степени n не более n корней.

42. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

43. Многочлены с целыми коэффициентами. Теорема о рациональном корне.

44. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что если $a\equiv b\ (mod\ m)$, то $P(a)\equiv P(b)\ (mod\ m)$

45. $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что $P(Q(x))=Q(P(x))$. Докажите, что $P(P(x))-Q(Q(x))$ делится на $P(x)-Q(x)$.

46. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого натурального k существует такое натуральное n, что $P(1)+P(2)+...+P(n)$ делится на k.

47. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ степени n с натуральными коэффициентами найдется такое целое число k, что числа $P(k),P(k+1),...,P(k+2019)$ будут составными, если n – произвольное натуральное число.

48. Теорема Виета для многочлена произвольной степени.

49. Может ли ax^2+bx+c иметь рациональные корни, если его коэффиценты нечетны?

50. Сто а)последовательных б) последовательных чётных чисел взяли в качестве коэффициентов a_k и b_k в 50 квадратных уравнениях вида $x^2+a_kx+b_k=0$. Могут ли все эти уравнения иметь целые корни?

51. Даны три действительных числа: a,b и c. Известно, что $a+b+c>0, ab++bc+ca>0, abc>0$. Докажите, что $a>0, b>0$ и $c>0$.

52. Даны действительные числе $a_1\le a_2\le a_3$ и $b_1\le b_2\le b_3$ такие, что $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$ и $a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3$. Докажите, что если $a_1\le b_1$, то $a_3\le b_3$.

53. Найдите сумму всевозможных произведений четного количества дробей $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{100}$

54. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

55. Многочлен P степени 2023 с целыми коэффициентами принимает в 2023 целых точках значения ±1. Докажите, что многочлен P нельзя представить в виде произведения $P=Q_1Q_2$, где Q_i многочлены ненулевой степени с целыми коэффициентами.

56. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x=0,1,\ldots n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.

57. $P(x)$ - многочлен степени $n.P(i)=\frac{1}{i+1}, i=0,1\ldots,n$, Найдите $P(n+1)$.

58. Верно ли, что при непрерывном изменении одного из коэффициентов кубического уравнения его наименьший корень также изменяется непрерывно?

59. Приведенный квадратный трехчлен $P(x)$ имеет 2 различных корня. Могло ли оказаться так, что $P(P(x))$ имеет 3 различных корня, а $P(P(P(x)))=0$ имеет 7 различных корней?

60. Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$. Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

61. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1,n_2,\ldots,n_k$ и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2)...P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?

62. Триангуляции. Граф триангуляции. Связь количества диагональных треугольников и треугольников с 2 сторонами, являющимися сторонами многоугольника.

63. На доске начертили многоугольник. В нем провели несколько диагоналей, непересекающихся внутри него, так, что он оказался разбит на треугольники. Затем возле каждой вершины записали число треугольников, которые к ней примыкают, после чего все диагонали стерли. Можно ли по оставшимся возле вершин числам восстановить стертые диагонали?

64. Транснеравенство.

65. Неравенство Чебышева.

66. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

67. Неравенство Минковского.

68. Дробное КБШ.

69. Обязательно ли треугольник равнобедренный, если центр его вписанной окружности одинаково удалён от середин двух сторон?

70. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса BK и высота CH. Может ли площадь треугольника, образованного точками пересечения этих отрезков, быть больше $0,499S_{ABC}$?