Пути и циклы

20 сентября

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество ребер — через $E(G)$, для количества вершин и ребер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Через $d_G(x)$ мы обозначаем степень вершины x в графе G. Через $\delta(G)$ мы обозначаем минимальную степень вершины графа G. Длина пути и цикла в графе всегда измеряется в ребрах. Гамильтонов путь (цикл) - простой путь (цикл), который проходит через каждую вершину графа ровно один раз.

1. Пусть $a_1, \dots, a_{10}$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_{10}) \geqslant 11$ и $a_1a_{10} \notin E(G)$. Докажите, что в графе есть два простых цикла, сумма длин которых равна 11.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что:
a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

3. Пусть $n > 2, a_1, \dots, a_n$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1)+d_G(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

4. В графе для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.

5. Для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u)+d_G(v) \geqslant v(G)$ Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

6. Пусть $ab \notin E(G), d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G)$, а в графе $G + ab$ есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

7. Пусть $v(G) = n$, а $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$— последовательность степеней вершин графа G. Пусть $d_i + d_{n-i} \geqslant n$ для каждого $i \in [1, \dots, n]$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

Домашнее задание.

8. На собрание пришли 20 учеников, причём каждый из них лично знает хотя бы 10 других. Докажите, что всех учеников можно рассадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих соседей.

9. Пусть $a_1, \dots, a_{10}$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_{10}) \geqslant 11$ и $a_1a_{10} \notin E(G)$. Докажите, что в графе есть два простых цикла, сумма длин которых равна 13.

Математический кружок • Школа 1568 2022-23

Пути и циклы

20 сентября

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество ребер — через $E(G)$, для количества вершин и ребер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Через $d_G(x)$ мы обозначаем степень вершины x в графе G. Через $\delta(G)$ мы обозначаем минимальную степень вершины графа G. Длина пути и цикла в графе всегда измеряется в ребрах. Гамильтонов путь (цикл) - простой путь (цикл), который проходит через каждую вершину графа ровно один раз.

1. Пусть $a_1, \dots, a_{10}$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_{10}) \geqslant 11$ и $a_1a_{10} \notin E(G)$. Докажите, что в графе есть два простых цикла, сумма длин которых равна 11.

2. Пусть $\delta(G) \geqslant 2$. Докажите, что:
a) в графе G есть простой путь длины хотя бы $\delta(G)$;
b) в графе G есть простой цикл длины хотя бы $\delta(G) + 1$.

3. Пусть $n > 2, a_1, \dots, a_n$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1)+d_G(a_n) \geqslant n$. Докажите, что в графе есть простой цикл длины n.

4. В графе для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u) + d_G(v) \geqslant v(G) - 1$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов путь.

5. Для любых двух несмежных вершин $u, v \in V(G)$ выполняется $d_G(u)+d_G(v) \geqslant v(G)$ Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

6. Пусть $ab \notin E(G), d_G(a) + d_G(b) \geqslant v(G)$, а в графе $G + ab$ есть гамильтонов цикл. Докажите, что в графе G также есть гамильтонов цикл.

7. Пусть $v(G) = n$, а $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$— последовательность степеней вершин графа G. Пусть $d_i + d_{n-i} \geqslant n$ для каждого $i \in [1, \dots, n]$. Докажите, что в графе G есть гамильтонов цикл.

Домашнее задание.

8. На собрание пришли 20 учеников, причём каждый из них лично знает хотя бы 10 других. Докажите, что всех учеников можно рассадить за круглый стол так, чтобы каждый знал обоих соседей.

9. Пусть $a_1, \dots, a_{10}$ — максимальный путь в графе G, причем $d_G(a_1) + d_G(a_{10}) \geqslant 11$ и $a_1a_{10} \notin E(G)$. Докажите, что в графе есть два простых цикла, сумма длин которых равна 13.