Таблица - это граф

6 сентября

1. На доске 100×100 отмечены n клеток. Известно, что ладья, начав с любой из отмеченных клеток, может за несколько ходов оказаться в любой строке, а также в любом столбце. Какое наименьшее количество клеток может быть отмечено на доске?

2. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка.

3. Имеется квадратик 100×100, в каждой клеточке которого ничего нет. За один ход Гриша берёт четыре пустые клеточки, образующие вершины прямоугольничка, стороны которого параллельны сторонам квадратика, и доставляет в одну из этих клеточек бочоночек мёдика. Какое наибольшее количество клеточек может оказаться с мёдиком?

4. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?

5. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

6. В таблице $n \times n$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

Домашнее задание.

7. В каждой строке и каждом столбце прямогугольный таблицы стоит по 2 фишки. Докажите, что можно снять часть фишек так, что в каждой строке и каждом столбце окажется по 1 фишке.

8. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Математический кружок • Школа 1568 2022-23

Таблица - это граф

6 сентября

1. На доске 100×100 отмечены n клеток. Известно, что ладья, начав с любой из отмеченных клеток, может за несколько ходов оказаться в любой строке, а также в любом столбце. Какое наименьшее количество клеток может быть отмечено на доске?

2. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки число звездочек в ее столбце равно числу звездочек в ее строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна звездочка.

3. Имеется квадратик 100×100, в каждой клеточке которого ничего нет. За один ход Гриша берёт четыре пустые клеточки, образующие вершины прямоугольничка, стороны которого параллельны сторонам квадратика, и доставляет в одну из этих клеточек бочоночек мёдика. Какое наибольшее количество клеточек может оказаться с мёдиком?

4. Таблица 50×50 заполнена натуральными числами таким образом, что все суммы чисел по строкам и столбцам равны. Какое наименьшее количество чисел надо изменить, чтобы все эти 100 сумм стали попарно различны?

5. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?

6. В таблице $n \times n$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

Домашнее задание.

7. В каждой строке и каждом столбце прямогугольный таблицы стоит по 2 фишки. Докажите, что можно снять часть фишек так, что в каждой строке и каждом столбце окажется по 1 фишке.

8. На клетчатой доске 11×11 отмечено 22 клетки так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно две клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?