Таблицы

1. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

2. (a) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

   (b) То же самое, только Олег вписывал произведения вместо сумм.

3. Дана таблица 8×8 покрашенная в шахматном порядке. За каждый шаг разрешается менять местами любые 2 столбца или любые 2 строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина - черной?

4. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

5. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

6. Дана таблица $n \times n$, в каждой клетке записано число, причем все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа

7. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков?(ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку)

8. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

9. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

10. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?

Таблицы

1. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы в каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

2. (a) Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал сумму чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица сложения»). Какое наибольшее количество сумм в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

   (b) То же самое, только Олег вписывал произведения вместо сумм.

3. Дана таблица 8×8 покрашенная в шахматном порядке. За каждый шаг разрешается менять местами любые 2 столбца или любые 2 строки. Можно ли за несколько шагов сделать так, чтобы верхняя половина таблицы стала белой, а нижняя половина - черной?

4. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?

5. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?

6. Дана таблица $n \times n$, в каждой клетке записано число, причем все числа различны. В каждой строке отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных столбцах. Затем в каждом столбце отметили наименьшее число, и все отмеченные числа оказались в разных строках. Докажите, что оба раза отметили одни и те же числа

7. Можно ли разбить клетчатую доску 12×12 на уголки из трёх соседних клеток так, чтобы каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд клеток доски пересекал одно и то же количество уголков?(ряд пересекает уголок, если содержит хотя бы одну его клетку)

8. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

9. В некоторых клетках таблицы 10×10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

10. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k удачным, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k, расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?