Соображения непрерывности.

Определение. *Непрерывными называются функции, у которых при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции (т.е. график можно провести «не отрывая руки»). Элементарные функции, которые изучаются в рамках базового курса математики основной школы, являются непрерывными на своей области определения (Многочлены, тригонометрические функции, логарифмы).*

Теорема. *(О промежуточном значении) Если некоторая непрерывная функция $S(t)$ такова, что $S(t_1) = A, S(t_2) = B$, то на промежутке от t_1 до t_2 она принимает все значения от A до B.*

0. Цирковая лошадь по команде дрессировщика плавно начинает бег по окружности арены в точке А и, пробежав круг, плавно останавливается в той же точке. Докажите, что существуют две диаметрально противоположные точки арены, которые лошадь проходит с одной и той же скоростью.
1. Приведите пример разрывной функции.
2. Два автомобиля выехали из пунктов А и В, расстояние между которыми 100 км, навстречу друг другу по одному и тому же шоссе. Докажите, что расстояние между автомобилями принимает любое значение от 0 до 100 км (в какие-то моменты времени).
3. (Задача о буддийском монахе.) Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма, и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.
4. а) Из города А в город В ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из А в В и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей чем $2R$, смогли доехать от А до В, не порвав веревки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса R, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?
б) В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.
5. а) Пусть α- корень уравнения $x^2 + px + q$, а β - корень уравнения $x^2 - px - q$. Докажите, что между α и β есть корень уравнения $x^2 - 2px - 2q$.
б) Докажите, что квадратное уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0$ имеет хотя бы один корень.
6. Пусть a, b, c таковы, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.
7. Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.
8. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на R и уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.
9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и её множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.
10. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

Домашнее задание

1. Решите неравенство $ax^2 + x - b > 0$, если известно, что $ab < -0,25,\ b < 9a + 3$.
2. Даны уравнения $ax^2+bx+c = 0$ (1) и $-ax^2+bx+c = 0$ (2), где $a \neq 0$. Докажите, что если $x_1 \neq 0$ — корень уравнения (1), а $x_2 \neq 0$ — корень уравнения (2), то найдётся такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, который лежит между x_1 и x_2.

Соображения непрерывности.

Определение. *Непрерывными называются функции, у которых при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции (т.е. график можно провести «не отрывая руки»). Элементарные функции, которые изучаются в рамках базового курса математики основной школы, являются непрерывными на своей области определения (Многочлены, тригонометрические функции, логарифмы).*

Теорема. *(О промежуточном значении) Если некоторая непрерывная функция $S(t)$ такова, что $S(t_1) = A, S(t_2) = B$, то на промежутке от t_1 до t_2 она принимает все значения от A до B.*

0. Цирковая лошадь по команде дрессировщика плавно начинает бег по окружности арены в точке А и, пробежав круг, плавно останавливается в той же точке. Докажите, что существуют две диаметрально противоположные точки арены, которые лошадь проходит с одной и той же скоростью.
1. Приведите пример разрывной функции.
2. Два автомобиля выехали из пунктов А и В, расстояние между которыми 100 км, навстречу друг другу по одному и тому же шоссе. Докажите, что расстояние между автомобилями принимает любое значение от 0 до 100 км (в какие-то моменты времени).
3. (Задача о буддийском монахе.) Монах поднимался на священную гору. Он начал восхождение в 6 часов утра и достиг вершины в 6 часов вечера. На вершине он заночевал, а на следующий день в 6 утра начал спускаться по пути подъёма, и достиг подножия горы в 6 часов вечера. Докажите, что существует такая точка на его маршруте, в которой монах сможет помолиться на пути туда и обратно в одно и то же время.
4. а) Из города А в город В ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что два экипажа, выехавшие по двум разным дорогам из А в В и связанные верёвкой некоторой длины, меньшей чем $2R$, смогли доехать от А до В, не порвав веревки. Смогут ли разминуться, не задев друг друга, два круглых воза радиуса R, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?
б) В противоположных углах квадратного пруда со стороной 100 метров сидели два гуся. Поплавав по пруду, они оказались в двух других противоположных углах. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между кончиками их клювов было равно 110 метров.
5. а) Пусть α- корень уравнения $x^2 + px + q$, а β - корень уравнения $x^2 - px - q$. Докажите, что между α и β есть корень уравнения $x^2 - 2px - 2q$.
б) Докажите, что квадратное уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a) = 0$ имеет хотя бы один корень.
6. Пусть a, b, c таковы, что $c(a + b + c) < 0$. Докажите, что $b^2 - 4ac > 0$.
7. Докажите, что любой многочлен нечётной степени имеет хотя бы один действительный корень.
8. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на R и уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ также не имеет корней.
9. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и её множество значений принадлежит этому же отрезку. Докажите, что на этом отрезке уравнение $f(x) = x$ имеет хотя бы один корень.
10. Пусть $P(x)$ — многочлен нечётной степени. Докажите, что уравнение $P(P(x)) = 0$ имеет не меньше различных действительных корней, чем уравнение $P(x) = 0$.

Домашнее задание

1. Решите неравенство $ax^2 + x - b > 0$, если известно, что $ab < -0,25,\ b < 9a + 3$.
2. Даны уравнения $ax^2+bx+c = 0$ (1) и $-ax^2+bx+c = 0$ (2), где $a \neq 0$. Докажите, что если $x_1 \neq 0$ — корень уравнения (1), а $x_2 \neq 0$ — корень уравнения (2), то найдётся такой корень x_3 уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, который лежит между x_1 и x_2.