

Поворот

0. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены равносторонние треугольники: ABP – извне, BCQ – изнутри. Докажите, что $PQ = AC$.
1. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P – середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM равносторонний.
2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно. Докажите, что $\angle BAM = \angle MAK$ тогда и только тогда, когда $BM + KD = AK$.
3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a , отмечены точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN . Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN , проведенной из вершины A .
4. На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Докажите, что
 - а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$, а угол между любыми двумя из них равен 60° .
 - б) Три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O .
 - в) Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 также пересекаются в точке O .
 - г)* Точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение. (Точку O часто называют точкой Ферма треугольника ABC . Иногда ее называют также точкой Торичелли этого треугольника).
5. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC . Докажите, что $MC = MA + MB$.
6. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M – середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK равносторонний.
7. В треугольнике ABC проведена медиана BM . На сторонах AB и BC построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что продолжение медианы BM является высотой треугольника DBG .
8. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 – на A_3P , из A_3 – на A_4P , из A_4 – на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
9. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2 . Докажите, что
 - а) отрезки A_1C и A_2B равны и перпендикулярны друг другу;
 - б) центры квадратов и середины отрезков BC и A_1A_2 являются вершинами квадрата.

Домашнее задание

10. На сторонах AB и BC ромба $ABCD$ с углом ABC , равным 120° , выбраны точки E и F соответственно так, что отрезки AE и BF равны. Найдите угол $\angle FDE$.
11. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника MCK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK .

Поворот

0. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены равносторонние треугольники: ABP – извне, BCQ – изнутри. Докажите, что $PQ = AC$.
1. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P – середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM равносторонний.
2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно. Докажите, что $\angle BAM = \angle MAK$ тогда и только тогда, когда $BM + KD = AK$.
3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна a , отмечены точки M и N соответственно так, что площадь треугольника AMN равна сумме площадей треугольников ABM и ADN . Найдите угол MAN и длину высоты треугольника AMN , проведенной из вершины A .
4. На сторонах остроугольного треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , AB_1C и ABC_1 . Докажите, что
 - а) $AA_1 = BB_1 = CC_1$, а угол между любыми двумя из них равен 60° .
 - б) Три окружности, описанные около равносторонних треугольников, пересекаются в некоторой точке O .
 - в) Прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 также пересекаются в точке O .
 - г)* Точка O является той точкой плоскости, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC принимает наименьшее значение. (Точку O часто называют точкой Ферма треугольника ABC . Иногда ее называют также точкой Торичелли этого треугольника).
5. Точка M лежит на дуге AB описанной окружности правильного треугольника ABC . Докажите, что $MC = MA + MB$.
6. Шестиугольник $ABCDEF$ правильный, K и M – середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK равносторонний.
7. В треугольнике ABC проведена медиана BM . На сторонах AB и BC построены квадраты $ABDE$ и $BCFG$. Докажите, что продолжение медианы BM является высотой треугольника DBG .
8. Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 – на A_3P , из A_3 – на A_4P , из A_4 – на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
9. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_1 и ACC_1A_2 . Докажите, что
 - а) отрезки A_1C и A_2B равны и перпендикулярны друг другу;
 - б) центры квадратов и середины отрезков BC и A_1A_2 являются вершинами квадрата.

Домашнее задание

10. На сторонах AB и BC ромба $ABCD$ с углом ABC , равным 120° , выбраны точки E и F соответственно так, что отрезки AE и BF равны. Найдите угол $\angle FDE$.
11. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника MCK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK .