

Полуинвариант-1

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант – это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели. Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может заиклиться).

- В одной стране все города подняли над ратушами флаги – белые либо черные. Каждый день жители узнают цвета флагов у соседей в радиусе 100 км. Один из городов, где у большинства соседей флаги другого цвета, меняет свой флаг на этот другой цвет. Докажите, что со временем смены цвета флагов прекратятся.
- Сыщик гоняется за Шпионом по Архипелагу Ста Островов. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру без захода на другие острова. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном острове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам.
 - Как Сыщику поймать Шпиона?
 - Докажите, что в задаче Сыщик может поймать Шпиона не позднее, чем через два года.
- На шахматной доске 100×100 коню разрешено ходить только в четырех направлениях: на 2 вверх и 1 влево, на 2 вверх и 1 вправо, на 2 вправо и 1 вверх, на 2 вправо и 1 вниз. Докажите, что с какой бы клетки он ни начал, удастся сделать лишь конечное число ходов.
- В ряд слева направо стоят 10 коробок. В самой левой лежит 1 шарик, в следующей – 2, ..., в последней – 10. За один ход можно переложить любой шарик в любую коробку правее той, где он лежит.
 - Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.
 - Какое наибольшее число ходов могло быть сделано?
 - На доске записано 100 чисел. За один ход можно выбрать 2 разных числа и заменить меньшее на большее. Докажите, что рано или поздно ходы закончатся.
- На доске написаны 20 различных натуральных числа. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое, геометрическое или гармоническое его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее – натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.
 - В клетках таблицы 99×99 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток минусов больше чем плюсов, разрешается в этом прямоугольнике поменять все знаки на противоположные. Докажите, что через некоторое время в каждом таком прямоугольнике плюсов будет не меньше чем минусов.
 - В клетках таблицы 99×99 расставлены целые числа. Если в каком-то прямоугольнике из не менее чем 100 клеток сумма отрицательна, разрешается в этом прямоугольнике поменять знаки всех чисел на противоположные. Докажите, что через некоторое время сумма чисел в каждом таком прямоугольнике будет неотрицательной.
 - То же, что и в предыдущем пункте, но числа — действительные.
- По кругу стоит 1000 фишек трёх цветов. Если оба соседа фишки одного цвета, а сама фишка – другого, то за ход её можно перекрасить в цвет соседей. Докажите, что можно будет сделать лишь конечное число таких ходов.
- Есть 10 различных чисел (возможно, нецелых). За одну операцию можно два неравных числа заменить на два равных с той же суммой.
 - Может ли один и тот же набор чисел возникнуть дважды?
 - Может ли процесс продолжаться бесконечно?
- В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если "пачка" состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.
- В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

Полуинвариант-2

Пусть есть последовательность объектов, или процесс, в котором позиции последовательно сменяются. Полуинвариант – это связанное с позицией число, которое при разрешенных действиях все время растет или все время убывает (возможно, нестрого). Выбор полуинварианта зависит от цели. Если есть строгий полуинвариант, то позиция не может повториться (и, в частности, процесс не может заиклиться).

- В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B , оттуда — в самый удаленный от него город C , и т. д. Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник никогда не вернется в A .
- В каждой из n стран правит либо партия правых, либо партия левых. Каждый год в одной из стран может поменяться власть. Это может произойти в том случае, если в большинстве граничащих с ней стран правит не та партия, которая правит в этой стране. Докажите, что смены правительств не могут продолжаться бесконечно.
- В парламенте у каждого не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в его палате будет не более одного врага.
- На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что рано или поздно на доске останется одно число.
- У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый – по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?
- На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «10» заменять на набор цифр «0111». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?
- На квадратном поле 10×10 девять клеток 1×1 поросли бурьяном. После этого бурьян может распространиться на клетку, у которой не менее двух соседних клеток уже поросли бурьяном. Докажите, что тем не менее бурьян не сможет распространиться на все клетки.
- На плоскости дано 100 красных и 100 синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 100 непересекающихся отрезков с разноцветными концами.
- Несколько ребят стоят по кругу. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
- В окружность вписан неправильный многоугольник. Если вершина A разбивает дугу, заключенную между двумя другими вершинами, на две неравные части, то такая вершина A называется неустойчивой. Каждую секунду какая-нибудь неустойчивая вершина перепрыгивает в середину своей дуги. В результате каждую секунду образуется новый многоугольник. Докажите, что сколько бы секунд ни прошло, многоугольник никогда не будет равным исходному.
- По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (k -й и $(k+1)$ -й), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$ -ю и $(k+2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся. (Пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают.)