Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.
В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC, его ортоцентр обозначен через H, центр описанной окружности ω— через O, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно, R — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол C треугольника ABC, если отрезок A_1B_1 а) равен R; б) равен $\frac{1}{2}R$.
   в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?
2. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла провели высоты AM и AN. Известно, что $AC = t$ и $MN = n$. Найти расстояние от точки A до ортоцентра треугольника AMN.
3. а)Ортоцентр отразили относительно середин сторон AB, AC, BC треугольника ABC и получили C_2, B_2, A_2 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
   б) Высоты треугольника продлили до пересечения с окружностью в точках C_2, B_2, A_2 . Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
4. В окружность с центром O вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
5. а) $ABCD$ – вписанный четырехугольник. H_C и H_D – ортоцентры треугольников ABD и ABC. Докажите, что H_CH_DCD- параллелограмм.
   б) Пусть дан треугольник ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.
6. Точку C_1 отразили относительно сторон AC, BC и получили точки N, K соответственно. Докажите, что точки N и K лежат на прямой A_1B_1 .
7. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA, OB и OC. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что $Q = H$.
9. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая KH проходит через A_0 .
10. K — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на касательную к описанной окружности треугольника ABC, проведённой в точке A. Докажите, что треугольник AA_0K равнобедренный.

Домашнее задание

11. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины A, B, C треугольника ABC и перпендикулярные отрезкам B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.

Ортоцентр-2.

Листочек посвящен свойствам ортоцентра доказанным в предыдущем листике.
В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC, его ортоцентр обозначен через H, центр описанной окружности ω— через O, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно, R — радиус описанной около него окружности.

1. Найдите угол C треугольника ABC, если отрезок A_1B_1 а) равен R; б) равен $\frac{1}{2}R$.
   в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?
2. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла провели высоты AM и AN. Известно, что $AC = t$ и $MN = n$. Найти расстояние от точки A до ортоцентра треугольника AMN.
3. а) Ортоцентр отразили относительно середин сторон AB, AC, BC треугольника ABC и получили C_2, B_2, A_2 соответственно. Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
   б) Высоты треугольника продлили до пересечения с окружностью в точках C_2, B_2, A_2 . Найдите стороны треугольника $A_2B_2C_2$, если стороны треугольника ABC равны 5, 6, 7.
4. В окружность с центром O вписан четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Доказать, что расстояние от точки O до стороны четырехугольника равно половине длины противоположной стороны.
5. а) $ABCD$ – вписанный четырехугольник. H_C и H_D – ортоцентры треугольников ABD и ABC. Докажите, что H_CH_DCD- параллелограмм.
   б) Пусть дан треугольник ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в точках пересечения высот треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$ равен треугольнику $A_1B_1C_1$.
6. Точку C_1 отразили относительно сторон AC, BC и получили точки N, K соответственно. Докажите, что точки N и K лежат на прямой A_1B_1 .
7. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA, OB и OC. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.
8. Точки P и Q выбраны так, что $BOAP$ и $COPQ$ — параллелограммы. Докажите, что $Q = H$.
9. Описанная окружность треугольника AB_1C_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке K, отличной от A. Докажите, что прямая KH проходит через A_0 .
10. K — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на касательную к описанной окружности треугольника ABC, проведённой в точке A. Докажите, что треугольник AA_0K равнобедренный.

Домашнее задание

11. Докажите, что три прямые, проходящие через вершины A, B, C треугольника ABC и перпендикулярные отрезкам B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 соответственно, пересекаются в одной точке.