Ориентированные графы

Две вершины A и B в ориентированном графе называются *связанными*, если существует ориентированный путь как из A в B, так и из B в A.

Ориентированный граф, в котором любые две вершины связаны, называется *сильно связным.*

Связанность вершин — отношение эквивалентности, значит, вершины любого ориентированного графа разбиваются на классы эквивалентности, называемые *компонентами сильной связности.*

С каждым ориентированным графом G свяжем ориентированный граф $C(G)$ («граф компонент»), вершинами которого являются компоненты сильной связности G, и стрелка между элементами в $C(G)$ проведена тогда и только тогда, когда в G между какими-то вершинами из этих компонент проведена стрелка в ту же сторону.

0. Докажите, что для любого n существует полный ориентированный граф G такой что $v(G) = v(C(G)) = n$

1. **a)** Докажите, что в $C(G)$ нет циклов.

b) Вершины u и v ориентированного графа лежат в одной компоненте. Докажите, что все пути из u в v целиком лежат внутри этой компоненты.

c) Докажите, что в $C(G)$ можно занумеровать элементы так, чтобы для любых двух вершин i и j выполнялось следующее:

(стрелка ведёт из i в j) $\Rightarrow i < j$

А если G — полный, то вместо следствия можно сделать равносильность.

2. Докажите, что если в связном графе расставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет равна выходящей степени, то полученный ориентированный граф будет сильно связным.

3. В связном графе каждое ребро ориентировали. Известно, что если выйти из любой вершины по любой стрелке, то по каким-то другим стрелкам можно вернуться в эту вершину. Докажите, что получился сильно связный граф.

4. **a)** Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе есть гамильтонов цикл.

Указание. Рассмотрите цикл наибольшей длины.

b) Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе на n вершинах есть циклы любой длины от 3 до n.

c) Даны натуральные числа $n > m > 1$. В полном n-вершинном оринтированном графе нет циклов из $m+1$ вершины. Докажите, что вершины этого графа можно так занумеровать числами от 1 до n, что при любых i, k, удовлетворящих условию $i \geqslant k+m-1$ ребро направлено из i-ой вершины в k-ю.

5. **a)** В сильно связном графе с n вершинами выбрали вершину A. Докажите, что можно оставить $n-1$ стрелку, а остальные удалить так, чтобы из A можно было добраться до любой вершины.

b) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе на n вершинах можно удалить некоторые стрелки и оставить не более $2n-2$ стрелок так, чтобы он остался сильно связным.

c) Если при этом между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то можно оставить не более $2n-3$ стрелок.

d) Приведите примеры для пунктов b) и c), когда меньше оставить нельзя (для любого $n \geqslant 3$).

6. Пусть G — сильно связный ориентированный граф на n вершинах. Всегда ли можно покрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы из любой вершины, кроме, может быть, одной, выходила хотя бы одна стрелка в вершину противоположного цвета?

7. Пусть G —– сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа G в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.

Ориентированные графы

Две вершины A и B в ориентированном графе называются *связанными*, если существует ориентированный путь как из A в B, так и из B в A.

Ориентированный граф, в котором любые две вершины связаны, называется *сильно связным.*

Связанность вершин — отношение эквивалентности, значит, вершины любого ориентированного графа разбиваются на классы эквивалентности, называемые *компонентами сильной связности.*

С каждым ориентированным графом G свяжем ориентированный граф $C(G)$ («граф компонент»), вершинами которого являются компоненты сильной связности G, и стрелка между элементами в $C(G)$ проведена тогда и только тогда, когда в G между какими-то вершинами из этих компонент проведена стрелка в ту же сторону.

0. Докажите, что для любого n существует полный ориентированный граф G такой что $v(G) = v(C(G)) = n$

1. **a)** Докажите, что в $C(G)$ нет циклов.

b) Вершины u и v ориентированного графа лежат в одной компоненте. Докажите, что все пути из u в v целиком лежат внутри этой компоненты.

c) Докажите, что в $C(G)$ можно занумеровать элементы так, чтобы для любых двух вершин i и j выполнялось следующее:

(стрелка ведёт из i в j) $\Rightarrow i < j$

А если G — полный, то вместо следствия можно сделать равносильность.

2. Докажите, что если в связном графе расставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет равна выходящей степени, то полученный ориентированный граф будет сильно связным.

3. В связном графе каждое ребро ориентировали. Известно, что если выйти из любой вершины по любой стрелке, то по каким-то другим стрелкам можно вернуться в эту вершину. Докажите, что получился сильно связный граф.

4. **a)** Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе есть гамильтонов цикл.

Указание. Рассмотрите цикл наибольшей длины.

b) Докажите, что в сильно связном полном ориентированном графе на n вершинах есть циклы любой длины от 3 до n.

c) Даны натуральные числа $n > m > 1$. В полном n-вершинном оринтированном графе нет циклов из $m+1$ вершины. Докажите, что вершины этого графа можно так занумеровать числами от 1 до n, что при любых i, k, удовлетворящих условию $i \geqslant k+m-1$ ребро направлено из i-ой вершины в k-ю.

5. **a)** В сильно связном графе с n вершинами выбрали вершину A. Докажите, что можно оставить $n-1$ стрелку, а остальные удалить так, чтобы из A можно было добраться до любой вершины.

b) Докажите, что в сильно связном ориентированном графе на n вершинах можно удалить некоторые стрелки и оставить не более $2n-2$ стрелок так, чтобы он остался сильно связным.

c) Если при этом между любыми двумя вершинами проведено не более одной стрелки, то можно оставить не более $2n-3$ стрелок.

d) Приведите примеры для пунктов b) и c), когда меньше оставить нельзя (для любого $n \geqslant 3$).

6. Пусть G — сильно связный ориентированный граф на n вершинах. Всегда ли можно покрасить его вершины в 2 цвета так, чтобы из любой вершины, кроме, может быть, одной, выходила хотя бы одна стрелка в вершину противоположного цвета?

7. Пусть G —– сильно связный ориентированный граф без чётных простых ориентированных циклов. Докажите, что для любой раскраски вершин графа G в два цвета найдётся вершина, имеющая тот же цвет, что и все вершины, в которые из неё ведут рёбра.