

## Многочлены-2. С целыми коэффициентами

- Теорема о рациональном корне.** Доказать, что если несократимая рациональная дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами, то
  - $a_n$  делится на  $q$ ;
  - $a_0$  делится на  $p$ ;
  - \*  $P(x) = (qx - p)Q(x)$ , где многочлен  $Q(x)$  также имеет целые коэффициенты.
- Найдите все корни уравнения  $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$ .
- Важный факт.** Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что
  - $P(a) - P(b)$  делится на  $a - b$  при всех целых  $a$  и  $b$
  - если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то  $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$
- Докажите, что не существует такого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, что  $P(-1) = 2$  и  $P(1) = 1$ .
  - Докажите, что не существует многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, для которого для некоторых целых чисел  $a, b, c$  выполняется, что  $P(a) = b, P(b) = c$  и  $P(c) = a$ .
- Многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами таков, что в пяти различных целых точках его значение равно 5. Докажите, что ни в одной целой точке значение этого многочлена не может равняться 8.
- $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ . Докажите, что  $P(P(x)) - Q(Q(x))$  делится на  $P(x) - Q(x)$ .
- На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
- Докажите, что для многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами существует натуральное  $n$  такое, что  $P(n)$  — составное.
- Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и любого натурального  $k$  существует такое натуральное  $n$ , что  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  делится на  $k$ .
- \* Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  степени  $n$  с натуральными коэффициентами найдется такое целое число  $k$ , что числа  $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2019)$  будут составными, если  $n$  — произвольное натуральное число.

### Домашнее задание

- Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.

## Многочлены-2. С целыми коэффициентами

- Теорема о рациональном корне.** Доказать, что если несократимая рациональная дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  с целыми коэффициентами, то
  - $a_n$  делится на  $q$ ;
  - $a_0$  делится на  $p$ ;
  - \*  $P(x) = (qx - p)Q(x)$ , где многочлен  $Q(x)$  также имеет целые коэффициенты.
- Найдите все корни уравнения  $6x^4 - 17x^3 - 7x^2 + 13x - 3 = 0$ .
- Важный факт.** Пусть  $P(x)$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что
  - $P(a) - P(b)$  делится на  $a - b$  при всех целых  $a$  и  $b$
  - если  $a \equiv b \pmod{m}$ , то  $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$
- Докажите, что не существует такого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, что  $P(-1) = 2$  и  $P(1) = 1$ .
  - Докажите, что не существует многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, для которого для некоторых целых чисел  $a, b, c$  выполняется, что  $P(a) = b, P(b) = c$  и  $P(c) = a$ .
- Многочлен  $P(x)$  с целыми коэффициентами таков, что в пяти различных целых точках его значение равно 5. Докажите, что ни в одной целой точке значение этого многочлена не может равняться 8.
- $P(x)$  и  $Q(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами. Известно, что  $P(Q(x)) = Q(P(x))$ . Докажите, что  $P(P(x)) - Q(Q(x))$  делится на  $P(x) - Q(x)$ .
- На графике многочлена с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.
- Докажите, что для многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами существует натуральное  $n$  такое, что  $P(n)$  — составное.
- Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и любого натурального  $k$  существует такое натуральное  $n$ , что  $P(1) + P(2) + \dots + P(n)$  делится на  $k$ .
- \* Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  степени  $n$  с натуральными коэффициентами найдется такое целое число  $k$ , что числа  $P(k), P(k+1), \dots, P(k+2019)$  будут составными, если  $n$  — произвольное натуральное число.

### Домашнее задание

- Если многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1, то он не имеет ни одного целого корня. Докажите это.