Комбинаторная ТЧ.

1. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух разноцветных чисел красное, а сумма синяя. Какого цвета может быть произведение двух красных чисел?
2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?
3. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы никакое из выбранных чисел не делилась на другое выбранное?
4. На какое наименьшее количество групп можно разбить числа от 1 до 2020 так, чтобы среди чисел одной группы ни одно из чисел не делилось ни на какое другое?
5. Вася по одной цифре выписывает без пробелов все натуральные числа по порядку. Докажите, что однажды, приписав очередную цифру одного из чисел, получится число, кратное 20232023 .
6. После запятой выписали степени а) 2020 б) 2021 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?
7. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?
8. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках делится на $n!$. Докажите, что карточки можно разложить на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась $n!$.
9. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d?
10. *а) Дано простое число p. Выбрали $(2k - 1)$ чисел ($k \leqslant p$), среди которых нет k одинаковых, и посчитали остаток суммы любых k из них при делении на p. Докажите, что получилось не меньше k различных остатков.
    б) Докажите, что из $(2p - 1)$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится
    на p. (p — простое).
    в) Докажите, что из $(2n-1)$ целых чисел всегда можно выбрать n чисел с суммой, кратной n.

Комбинаторная ТЧ.

1. Каждое натуральное число покрашено в красный или синий цвет. Оказалось, что произведение любых двух разноцветных чисел красное, а сумма синяя. Какого цвета может быть произведение двух красных чисел?
2. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы сумма никаких двух чисел не делилась на их разность?
3. Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди первых 2020 натуральных чисел, чтобы никакое из выбранных чисел не делилась на другое выбранное?
4. На какое наименьшее количество групп можно разбить числа от 1 до 2020 так, чтобы среди чисел одной группы ни одно из чисел не делилось ни на какое другое?
5. Вася по одной цифре выписывает без пробелов все натуральные числа по порядку. Докажите, что однажды, приписав очередную цифру одного из чисел, получится число, кратное 20232023 .
6. После запятой выписали степени а) 2020 б) 2021 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?
7. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать?
8. Имеется много карточек, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до n. Известно, что сумма чисел на всех карточках делится на n!. Докажите, что карточки можно разложить на несколько групп так, чтобы в каждой группе сумма чисел, записанных на карточках, равнялась n!.
9. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d?
10. *а) Дано простое число p. Выбрали $(2k - 1)$ чисел ($k \leqslant p$), среди которых нет k одинаковых, и посчитали остаток суммы любых k из них при делении на p. Докажите, что получилось не меньше k различных остатков.
    б) Докажите, что из $(2p - 1)$ целых чисел можно выбрать p, сумма которых делится на p. (p — простое).
    в) Докажите, что из $(2n-1)$ целых чисел всегда можно выбрать n чисел с суммой, кратной n.