Интерполяция

1. a)Пусть многочлен $g_k(x)$ степени n равен 0 при всех x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, кроме x_k. Докажите, что
$$g_k(x) = c \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (x - x_i)\,.$$
b)Чему должна быть равна константа c, чтобы $g_k(x_k)$ было равно 1?
c)**Интерполяционный многочлен Лагранжа**
Докажите, что единственный многочлен степени не выше n принимающий в точках x_i значения y_i, равен
$$\sum_{k=0}^{n} \left(y_k \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{k=0}^{n} \big(y_k \cdot g_k(x) \big)\ .$$

2. Упростите выражение
$$a)\quad \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$b)\quad \frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{c(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{b(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Про многочлен степени $2n$, известно что $P(i) = P(-i) = a_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что все его коэффициэнты при нечетных степенях равны 0.

4. Найдите многочлен степени не выше трех такой, что $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 4, P(3) = 8$.

5. Многочлен P степени 2017 с целыми коэффициентами принимает в 2017 целых точках значения ± 1. Докажите, что многочлен P нельзя представить в виде произведения $P = Q_1 Q_2$, где Q_i многочлены ненулевой степени с целыми коэффициентами.

6. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \ldots n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.
a) $n = 2$
b) $n = 3$
c) Произвольное n

7. $P(x)$ - многочлен степени n. $P(i) = \frac{1}{i+1}$, $i = 0, 1 \ldots, n$, Найдите $P(n+1)$

8. Пусть $P(x)$ - многочлен степени не выше n, для которого $P(i) = 2^i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, найдите $P(n+1)$

Интерполяция

1. a)Пусть многочлен $g_k(x)$ степени n равен 0 при всех x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, кроме x_k. Докажите, что
$$g_k(x) = c \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} (x - x_i)\,.$$
b)Чему должна быть равна константа c, чтобы $g_k(x_k)$ было равно 1?
c)**Интерполяционный многочлен Лагранжа**
Докажите, что единственный многочлен степени не выше n принимающий в точках x_i значения y_i, равен
$$\sum_{k=0}^{n} \left(y_k \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) = \sum_{k=0}^{n} \big(y_k \cdot g_k(x) \big)\ .$$

2. Упростите выражение
$$a)\quad \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$b)\quad \frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{c(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{b(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$$

3. Про многочлен степени $2n$, известно что $P(i) = P(-i) = a_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что все его коэффициэнты при нечетных степенях равны 0.

4. Найдите многочлен степени не выше трех такой, что $P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 4, P(3) = 8$.

5. Многочлен P степени 2017 с целыми коэффициентами принимает в 2017 целых точках значения ± 1. Докажите, что многочлен P нельзя представить в виде произведения $P = Q_1 Q_2$, где Q_i многочлены ненулевой степени с целыми коэффициентами.

6. Докажите, что если многочлен $f(x)$ степени n принимает целые значения в точках $x = 0, 1, \ldots n$, то он принимает целые значения во всех целых точках.
a) $n = 2$
b) $n = 3$
c) Произвольное n

7. $P(x)$ - многочлен степени n. $P(i) = \frac{1}{i+1}$, $i = 0, 1 \ldots, n$, Найдите $P(n+1)$

8. Пусть $P(x)$ - многочлен степени не выше n, для которого $P(i) = 2^i$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, найдите $P(n+1)$