Добавка по ТЧ

11 апреля

1. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

2. Докажите, что число $(a(a^{n-1}+1)-1)^n-1$ делится на a^n-1 при любых натуральных $a \geqslant 2$ и n.

3. Пусть $p = 5k+3$ — простое число.
а) Докажите, что сравнение $x^5 \underset{p}{\equiv} 1$ имеет единственное решение по модулю p.
б) Докажите, что если выполнено $x^5 \underset{p}{\equiv} y^5$, то $x \underset{p}{\equiv} y$.

4. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что $2^n - n$ делится на p.

5. Даны натуральные числа $a_1 > 1$ и $k > 2$. Задана последовательность $a_{n+1} = k^{a_1} + \ldots + k^{a_n}$. Докажите, что число $a_n - n + 1$ является составным при любом $n \geqslant 2$.

6. После запятой выписали все степени 2023 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?

7. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить так, чтобы сумма первых n чисел делилась на n для каждого натурального n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причём ровно один раз.

8. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.

Математический кружок • Школа 1568 2022-23

Добавка по ТЧ

11 апреля

1. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

2. Докажите, что число $(a(a^{n-1}+1)-1)^n-1$ делится на a^n-1 при любых натуральных $a \geqslant 2$ и n.

3. Пусть $p = 5k+3$ — простое число.
а) Докажите, что сравнение $x^5 \underset{p}{\equiv} 1$ имеет единственное решение по модулю p.
б) Докажите, что если выполнено $x^5 \underset{p}{\equiv} y^5$, то $x \underset{p}{\equiv} y$.

4. Пусть $p > 2$ — простое число. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных n, что $2^n - n$ делится на p.

5. Даны натуральные числа $a_1 > 1$ и $k > 2$. Задана последовательность $a_{n+1} = k^{a_1} + \ldots + k^{a_n}$. Докажите, что число $a_n - n + 1$ является составным при любом $n \geqslant 2$.

6. После запятой выписали все степени 2023 в произвольном порядке. Может ли это число быть рациональным?

7. Докажите, что числа натурального ряда можно переставить так, чтобы сумма первых n чисел делилась на n для каждого натурального n. Каждое натуральное число должно присутствовать, причём ровно один раз.

8. Найдите все такие пары натуральных чисел a и k, что для всякого натурального n, взаимно простого с a, число $a^{k^n+1} - 1$ делится на n.