Вопросы к зачету по олимпиадной математике. 8 класс. 1 группа

1. Свойства сочетаний.

2. Треугольник Паскаля.

3. а) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k-1}^{k-1}$.
   б) Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{n-k-1}^{0}$.

4. Докажите, что число а равно количеству путей, ведущих из вершины треугольника Паскаля к месту, где стоит число а.(Мы можем двигаться только вниз от вершины, переходя к одному двух из чисел на следующей строке, между которыми оно стоит.)

5. Докажите, что каждое число а в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный теми правой и левой диагоналями, на пересечении которых стоит число а (сами эти диагонали в рассматриваемый параллелограмм не включаются).

6. Бином Ньютона.

7. При каких натуральных n число $(\sqrt{2}+1)^n - (\sqrt{2}-1)^n$ будет целым?

8. Формула включений-исключений.

9. Определения дерева. Доказательство эквивалентности определений.

10. Существование висячих вершин в дереве. Остовное дерево. Доказательство существования остовного дерева для связного графа.

11. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из каждого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

12. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n-4$ разговора все они могут узнать все новости.

13. Дан граф, содержащий $2n$ вершин и не менее чем n^2+1 ребро. Докажите, что в нем есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

14. Подвешивание графа. В стране 125 городов, некоторые из которых соединены друг с другом дорогами. Из каждого города выходит хотя бы 5 дорог. Докажите, что существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 6 городов.)

15. Вася отметил на плоскости 2020 точек и соединил их их 4100 линиями. Докажите, что Вася существует циклический маршрут, состоящий из не более чем 20 городов.

16. Принцип Дирихле в графах. Задача Рамсея.

17. Для любых 30 городов верно, что между какими-то двумя из них есть дорога. Докажите, что есть город, из которого выходит больше 20 дорог, если всего городов 610.

18. Теория информации. Есть 9 внешне неразличимых шаров, из них 4 из золота, 5 —– из меди. Эксперт знает, какие шары золотые. Но он может только лишь отвечать “да” или “нет” на ваши вопросы. За какое минимальное число вопросов можно узнать все золотые шары?

19. Можно ли это сделать за 3 взвешивания найти 1 фальшивую монету из 13 и узнать легче она или тяжелее?

20. За какое наименьшее количество взвешиваний из 12 монет среди которых одна фальшивая можно найти фальшивую и узнать легче она или тяжелее?

21. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз и ведущий знает где он находится. Зритель может послать ведущего пачку записок с вопросами, требующих ответа да или нет. Ведущий перемешивает записки в пачке и не оглашая вопросов честно отвечает на них. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать где находится приз?

22. Катя загадала число от 1 до 256. Петя хочет угадать его за восемь вопросов, но список этих вопросов нужно предъявить заранее. Как ему это сделать?

23. Фокусник с помощником собираются показать такой фокус. Зритель пишет на доске последовательность из N цифр. Помощник фокусника закрывает а)одну цифру б)две соседних цифры черным кружком. Затем входит фокусник. Его задача – отгадать закрытое кружком. При каком наименьшем N фокусник может договориться с помощником так, чтобы фокус гарантированно удался?

24. Талантливый мальчик Петя Торт загадал натуральное число от 1 до 1000. Вы можете задавать ему вопросы вида «Принадлежит ли твоё число множеству X?». На первый вопрос он точно ответит правильно; но потом в какой-то момент у него может испортиться настроение, и он начнёт врать. Обратно настроение не улучшится. За какое наименьшее число вопросов можно гарантированно узнать загаданное число?

25. Сфинкс загадал три произвольных натуральных числа x, y, z. Если путник назовёт Сфинксу три натуральных числах a, b и c, то сфинкс скажет ему, чему равно $ax+by+cz$. Как за два вопроса путник может угадать числа Сфинкса?

26. Эльф нашёл n вкусных конфет. Но его друг проказник, подменил одну деревяшкой в фантике (деревяшка весит больше, чем конфета). В распоряжении эльфа есть только платные весы. Если одна чаша перевешивает другую, то эльф должен будет заплатить 1 рубль и 2 рубля в случае равновесия. При каком наибольшем n можно найти фальшивую конфету, заплатив не более 5 рублей?

27. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 2017$, любые 2 числа разрешается заменять на их среднее арифметическое. Какие целые числа могут остаться после 2016 операций?

28. На шахматной доске 8×8 стоит 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2,в котором стоит единственная пешка, и снять ее. Докажите, что не удастся снять все пешки.

29. Игры: передача хода. Есть 99! бактерий. Разрешается за ход убить не больше 1% бактерий. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выиграет при правильной игре?

30. а) Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2000, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2003. Каких треугольников больше?
    б) А если периметры 2001 и 2004?

31. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?

32. Геометрия. Пусть K, L, M и N – середины сторон AB, BC, CD и DA выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $KM \leq \dfrac{BC+AD}{2}$ причём равенство достигается, только если $BC \| \| AD$

33. Средняя линия четырехугольника образует равные углы с его диагоналями. Докажите, что эти диагонали равны.

34. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, а при вершинах C и D — в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру трапеции.

35. Прямая пересекает две соседние стороны параллелограмма. На нее из всех его вершин опущены перпендикуляры. Докажите, что один из них равен сумме трех других.

36. Внутри острого угла расположен выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Оказалось, что для каждой из двух прямых, содержащих стороны угла, выполняется условие: сумма расстояний от вершин A и C до этой прямой равна сумме расстояний от вершин B и D до этой же прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

37. На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC, опущены перпендикуляры BD и CE. Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E.

38. Дана равнобокая трапеция $ABCD$. Рассматривают точки Q и P на боковых сторонах AB и CD соответственно, для которых $CP = AQ$. Докажите, что середины всех таких отрезков PQ лежат на одной прямой.

39. В четырехугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны AB. Докажите, что если угол DMC - прямой, то $CD \leq AD + BC$.

40. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, в котором угол A равен $15°$. На катете AC отмечена точка K такая, что $KM = BC$ и угол AMK – тупой. Найдите углы треугольника KBC

41. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена биссектриса BD, на продолжении BC выбрана точка E так что $\angle EDB$ – прямой. Найдите BE, если $CD = 1$.

42. Точки E и K — середины сторон AD и DC параллелограмма $ABCD$. Из его вершины B на прямую EK опустили перпендикуляр BH. На стороне BC выбрали точку F так, что углы FHK и KED равны. Найдите $BF : FC$.

43. Алгебра. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов(5-хорошее $5 = 1^2 + 2^2$, 3 - нет). Докажите, что произведение двух хороших будет хорошим.

44. Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2 + y^2 = 19451945$.

45. Докажите для любых a, b, c, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

46. Пусть $0 < x, y < 2$. Докажите, что $\frac{4-x-y}{x+y-xy} \geq 1$.

47. Докажите, что многочлен $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ при всех значениях x положителен.

48. Формулы разности и суммы n степеней.

49. Как просуммировать выражение $1 + x + \ldots + x^n$?

50. Найдите все натуральные значения n, при которых $n^5 + 2$ делится на $n + 2$.

51. Даны 2000 чисел 11,101,1001, 10001, ... Докажите, что среди этих чисел меньше 20 простых.

52. Зацикливания. Принцип зацикливания. Принцип зацикливания назад.

53. Докажите, что для любого натурального $n > 1$, в ряде Фибоначчи существует бесконечно много членов
а) имеющих остаток 1 при делении на n;
б) делящихся на n.

54. На бесконечной в обе стороны ленте записан текст на русском языке. Известно, что в этом тексте число различных кусков из 15 символов равно числу различных кусков из 16 символов. Докажите, что на ленте записан «периодический» текст, например: . . . мамамыларамумамамылараму. . .

55. Дискретная непрерывность. Пример задачи.

56. Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?

57. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом радиуса 1/7.

58. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей.

59. Теория чисел. Докажите, что существует бесконечно много таких троек натуральных чисел a, b, c, что
а) $a^{15} + b^{17} = c^{16}$.
б) $a^{13} + b^{17} = c^{16}$.

60. Сколько чисел из отрезка [150,2019] представляются в виде $n = HOK(a, b) + HOK(b, c) + HOK(a, c)$, где a, b, c некоторые натуральные числа?

61. Сравнения. Доказательство свойств.

62. Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $ka \equiv kb \ (mod\ m)$ и $a \equiv b \ (mod\ m)$? А при каких k сравнения равносильны?

63. а)$7x \equiv 1 \ (mod\ 13)$. Какой остаток дает x?
б)Целые x и y таковы, что $5x + 8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт $2x - 2y$?

64. Малая теорема Ферма.

65. Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.

66. Пусть p — простое число, тогда $(11 \ldots 122 \ldots 233 \ldots 99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

67. Функция Эйлера. Доказательство мультипликативности и вывод формулы.

68. Теорема Эйлера.

69. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.

70. Докажите, что $2^{2^{\cdots^{2^2}}} - 2^{2^{\cdots^{2^2}}}$ (в первом слагаемом n двоек, во втором — $n - 1$) делится на все числа от 1 до n.

71. Теорема Вильсона.

72. Простое или составное число $\dfrac{2014! + 1009}{1009}$?

73. Китайская теорема об остатках.

74. Докажите, что существует миллион последовательных чисел, ни одно из которых не является точной степенью.

75. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Есть ли 2018 неадекватных чисел подряд?

76. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.