Теория чисел. Сравнения по модулю.

Определение. *Пусть m — натуральное число. Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b)$ делится на m. Обозначение $a \equiv b$ $(mod\ m)$.*

1. **Свойства сравнений.** Докажите
а) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $b \equiv c$ $(mod\ m)$, то $a \equiv c$ $(mod\ m)$
б) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $c \equiv d$ $(mod\ m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d$ $(mod\ m)$
в) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $c \equiv d$ $(mod\ m)$, то $ac \equiv bd$ $(mod\ m)$
г) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$, то $a^n \equiv b^n$ $(mod\ m)$.

2. а) Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $ak \equiv bk$ $(mod\ \ mk)$?
б) Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $ka \equiv kb$ $(mod\ m)$ и $a \equiv b$ $(mod\ m)$?
в) А при каких k сравнения в пункте б равносильны? (a, b, m-фиксированы и для них находим k)

3. Найдите остаток от деления
а) 1568^{1568} на 1567, 1569;
б) $30^{99} + 61^{100}$ на 31;
в) $7008 \cdot 7009 \cdot 7010 \cdot 7011 \cdot 7012 \cdot 7013$ на 7;
г) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$ на 2019;
д) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
е) $7^{2020} + 9^{2019}$ на 10;
ж) $3^{20^{20}} + 22^{2019}$ на 10.

4. а)$7x \equiv 1$ $(mod$ 13). Какой остаток дает x?
б)Целые x и y таковы, что $5x+8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт $2x-2y$?

5. Даны целые числа a, b, c, d. Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

6. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100}$ $(mod$ 13).

7. Докажите, что при любом натуральном n:
а) $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7;
б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

8. Докажите, что число $(5^n-1)^n - 6$ делится на $5^n - 6$ при любом натуральном n.

9. а) Найдите остаток от деления $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 102$ на 103.
б) Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-2)^n + (n-1)^n$ делится на n при любом нечетном n.

10. а) Известно, что $(\overline{def} - \overline{abc}) \vdots 7$. Доказать, что и $\overline{abcdef} \vdots 7$.
б)Известно, что $(\overline{def} + \overline{abc}) \vdots 37$. Доказать, что и $\overline{abcdef} \vdots 37$.

11. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + \ldots + 10^{1000000000}$.

Домашнее задание

12. Докажите, что $3^{2010}\ + 5^{2010}$ делится на 13.

Теория чисел. Сравнения по модулю.

Определение. *Пусть m — натуральное число. Два целых числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если $(a-b)$ делится на m. Обозначение $a \equiv b$ $(mod\ m)$.*

1. **Свойства сравнений.** Докажите
а) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $b \equiv c$ $(mod\ m)$, то $a \equiv c$ $(mod\ m)$
б) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $c \equiv d$ $(mod\ m)$, то $a \pm c \equiv b \pm d$ $(mod\ m)$
в) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $c \equiv d$ $(mod\ m)$, то $ac \equiv bd$ $(mod\ m)$
г) Пусть $a \equiv b$ $(mod\ m)$, то $a^n \equiv b^n$ $(mod\ m)$.

2. а)Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $a \equiv b$ $(mod\ m)$ и $ac \equiv bc$ $(mod\ \ mc)$?
б) Пусть $k \neq 0$. Равносильны ли сравнения $ka \equiv kb$ $(mod\ m)$ и $a \equiv b$ $(mod\ m)$?
в) А при каких k сравнения в пункте б равносильны? (a, b, m-фиксированы и для них находим k)

3. Найдите остаток от деления
а) 1568^{1568} на 1567, 1569;
б) $30^{99} + 61^{100}$ на 31;
в) $7008 \cdot 7009 \cdot 7010 \cdot 7011 \cdot 7012 \cdot 7013$ на 7;
г) $2016 \cdot 2017 \cdot 2018$ на 2019;
д) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;
е) $7^{2020} + 9^{2019}$ на 10;
ж) $3^{20^{20}} + 22^{2019}$ на 10.

4. а)$7x \equiv 1$ $(mod$ 13). Какой остаток дает x?
б)Целые x и y таковы, что $5x+8y$ даёт остаток 1 при делении на 13. Какой остаток при делении на 13 даёт $2x-2y$?

5. Даны целые числа a, b, c, d. Известно, что $a+5c$ и $b+4d$ делятся на 13. Докажите, что $ab-20cd$ делится на 13.

6. Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100}$ $(mod$ 13).

7. Докажите, что при любом натуральном n:
а) $16^{n+2} + 23^{n+1} + 37^n$ делится на 7;
б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$ делится на 17.

8. Докажите, что число $(5^n-1)^n - 6$ делится на $5^n - 6$ при любом натуральном n.

9. а) Найдите остаток от деления $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 101 + 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 102$ на 103.
б) Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-2)^n + (n-1)^n$ делится на n при любом нечетном n.

10. а) Известно, что $(\overline{def} - \overline{abc}) \vdots 7$. Доказать, что и $\overline{abcdef} \vdots 7$.
б)Известно, что $(\overline{def} + \overline{abc}) \vdots 37$. Доказать, что и $\overline{abcdef} \vdots 37$.

11. Найдите остаток от деления на 7 числа $10^{10} + 10^{100} + \ldots + 10^{1000000000}$.

Домашнее задание

12. Докажите, что $3^{2010}\ + 5^{2010}$ делится на 13.