Разбиение на пары

1. Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 2017, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.
2. Пусть p – простое число, большее 2, а $m/n = 1 + ½ + ⅓ + \ldots + 1/(p–1)$. Докажите, что m делится на p.
3. На окружности отмечено 2016 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?
4. а) Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2000, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2003. Каких треугольников больше?
   б) А если периметры 2001 и 2004?
5. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?
6. Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр от 1 до 9 в разном порядке. Пара таких чисел называется кондиционной, если их сумма равна 987654321.
   а) Докажите, что найдутся хотя бы две кондиционные пары ((a, b) и (b, a) – одна и та же пара).
   б) Доказать, что кондиционных пар – нечётное число.
7. На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки.

Разбиение на пары

1. Докажите, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 2017, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.
2. Пусть p – простое число, большее 2, а $m/n = 1 + ½ + ⅓ + \ldots + 1/(p–1)$. Докажите, что m делится на p.
3. На окружности отмечено 2016 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?
4. а) Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2000, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2003. Каких треугольников больше?
   б) А если периметры 2001 и 2004?
5. В Москве живет 2000 скалолазов, в Санкт-Петербурге и Красноярске — по 500, в Екатеринбурге — 200, а остальные 100 рассеяны по территории России. Где нужно устроить чемпионат России по скалолазанию, чтобы транспортные расходы участников были минимальны?
6. Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр от 1 до 9 в разном порядке. Пара таких чисел называется кондиционной, если их сумма равна 987654321.
   а) Докажите, что найдутся хотя бы две кондиционные пары ((a, b) и (b, a) – одна и та же пара).
   б) Доказать, что кондиционных пар – нечётное число.
7. На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки.