

## Малая теорема Ферма.

### Малая теорема Ферма.

Если  $p$  — простое число и  $a$  — целое число, не делящееся на  $p$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

### Малая теорема Ферма.

Если  $p$  — простое число и  $a$  — целое число, то  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

- а) Какой остаток дает  $3^{103}$  при делении на 101?  
б) Какой остаток дает  $2^{1010}$  при делении на 73?  
в) Какой остаток дает  $8^{900}$  при делении на 29?  
г) Докажите, что если  $a$  взаимнопросто с простым  $p$ , и  $b = k(p-1) + r$ , то  $a^b \equiv a^r \pmod{p}$ .  
д) Какой остаток дает  $42^{42^{42}}$  при делении на 2017?  
е) Докажите, что  $300^{3000} - 1$  делится на 1001.
- Докажите, что  $1^{100} + 2^{100} + \dots + 100^{100} + 1$  делится на 101.
- Натуральные числа  $a, b, c, d, e$  таковы, что  
а)  $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12}$  делится на 13. Докажите, что  $abcde$  делится на  $13^5$ .  
б) Известно, что  $n^2$  при делении на простое  $p$  дает остаток 1, какой остаток при делении на  $p$  может давать  $n$ ?  
в)  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$  делится на 13. Докажите, что  $abcde$  делится на 13.
- а) Будет ли простым число  $1568^{2016} + 4033$ ?  
б) Будет ли простым число  $30^{239} + 239^{30}$ ?
- а) Докажите, что ни при каком  $n$  число  $n^2 + 1$  не делится на 103.  
б) Докажите, что ни при каком целом  $n$  число  $n^2 + n + 1$  не делится на 101.  
в) Число  $a^2 + ab + b^2$  делится на простое вида  $p = 3k + 2$ . Докажите, что  $a$  и  $b$  делятся на  $p$ .
- Пусть  $p$ -простое число. Докажите, что  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$  для любых целых  $a, b$ .
- Пусть  $p, q$  — различные простые числа. Докажите, что  $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$ .
- а) Пусть  $p > 5$ - простое число. Докажите, что  $11\dots 1$  (в числе  $p-1$  единица) делится на  $p$ .  
б) Пусть  $p$  — простое число, тогда  $(11\dots 122\dots 233\dots 99 - 123456789)$  (в первом числе каждая цифра встречается ровно  $p$  раз) делится на  $p$ .

### Домашняя работа

- Докажите, что  $7^{120} - 1$  делится на 143.
- Докажите, что для простого числа  $p$  число  $2^{p^2} - 2$  делится на  $p$ .

## Малая теорема Ферма.

### Малая теорема Ферма.

Если  $p$  — простое число и  $a$  — целое число, не делящееся на  $p$ , то  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

### Малая теорема Ферма.

Если  $p$  — простое число и  $a$  — целое число, то  $a^p \equiv a \pmod{p}$ .

- а) Какой остаток дает  $3^{103}$  при делении на 101?  
б) Какой остаток дает  $2^{1010}$  при делении на 73?  
в) Какой остаток дает  $8^{900}$  при делении на 29?  
г) Докажите, что если  $a$  взаимнопросто с простым  $p$ , и  $b = k(p-1) + r$ , то  $a^b \equiv a^r \pmod{p}$ .  
д) Какой остаток дает  $42^{42^{42}}$  при делении на 2017?  
е) Докажите, что  $300^{3000} - 1$  делится на 1001.
- Докажите, что  $1^{100} + 2^{100} + \dots + 100^{100} + 1$  делится на 101.
- Натуральные числа  $a, b, c, d, e$  таковы, что  
а)  $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12}$  делится на 13. Докажите, что  $abcde$  делится на  $13^5$ .  
б) Известно, что  $n^2$  при делении на простое  $p$  дает остаток 1, какой остаток при делении на  $p$  может давать  $n$ ?  
в)  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$  делится на 13. Докажите, что  $abcde$  делится на 13.
- а) Будет ли простым число  $1568^{2016} + 4033$ ?  
б) Будет ли простым число  $30^{239} + 239^{30}$ ?
- а) Докажите, что ни при каком  $n$  число  $n^2 + 1$  не делится на 103.  
б) Докажите, что ни при каком целом  $n$  число  $n^2 + n + 1$  не делится на 101.  
в) Число  $a^2 + ab + b^2$  делится на простое вида  $p = 3k + 2$ . Докажите, что  $a$  и  $b$  делятся на  $p$ .
- Пусть  $p$ -простое число. Докажите, что  $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$  для любых целых  $a, b$ .
- Пусть  $p, q$  — различные простые числа. Докажите, что  $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$ .
- а) Пусть  $p > 5$ - простое число. Докажите, что  $11\dots 1$  (в числе  $p-1$  единица) делится на  $p$ .  
б) Пусть  $p$  — простое число, тогда  $(11\dots 122\dots 233\dots 99 - 123456789)$  (в первом числе каждая цифра встречается ровно  $p$  раз) делится на  $p$ .

### Домашняя работа

- Докажите, что  $7^{120} - 1$  делится на 143.
- Докажите, что для простого числа  $p$  число  $2^{p^2} - 2$  делится на  $p$ .