Комбинаторика

6 сентября

1. На доске нарисован треугольник. На одной его стороне отметили 10 красных точек, на другой стороне — 11 красных точек, а не третьей — 12 красных точек. Известно, что вершины изначального треугольника не отмечались красным. Сколько существует треугольников, все вершины которых красные?

2. (а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $a+b+c=40$.
(б) числа также не могут быть меньше двух.
(в) с ограничениями: $3 \leqslant a \leqslant 10, 4 \leqslant b \leqslant 7, 13 \leqslant c \leqslant 30$.

3. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество способов выбрать в нём две различные пересекающиеся внутри многоугольника диагонали.

4. Числа $1, 2, 3, \ldots, n$ записываются в строчку в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число k, то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел $k+1$ и $k-1$. Сколькими способами это можно сделать?

5. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 2021. Гриша хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

6. Назовём последовательность из 100 натуральных чисел хорошей, если любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1.
(а) Сколько существует хороших последовательностей с заданным первым членом, если числа могут быть не натуральными, а целыми?
(б) Сколько существует хороших последовательностей с наименьшим числом 1?
(в) Сколько существует хороших последовательностей, в которых встречается тройка?

Домашнее задание.

7. На столе лежат 100 различных карточек с числами $3, 6, 9, \ldots, 297, 300$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

8. Преподаватель принес в школу белую клетчатую доску 8×8. Ученик раскрасил каждую клетку доски в красный, черный или синий цвет. Оказалось, что любой уголок из пяти клеток содержит и синюю, и красную, и черную клетку. Покажите, что способов так покрасить доску у ученика было хотя бы 6^8.

Математический кружок • Школа 1568 2022-23

Комбинаторика

6 сентября

1. На доске нарисован треугольник. На одной его стороне отметили 10 красных точек, на другой стороне — 11 красных точек, а не третьей — 12 красных точек. Известно, что вершины изначального треугольника не отмечались красным. Сколько существует треугольников, все вершины которых красные?

2. (а) Сколько решений в целых неотрицательных числах имеет уравнение $a+b+c=40$.
(б) числа также не могут быть меньше двух.
(в) с ограничениями: $3 \leqslant a \leqslant 10, 4 \leqslant b \leqslant 7, 13 \leqslant c \leqslant 30$.

3. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество способов выбрать в нём две различные пересекающиеся внутри многоугольника диагонали.

4. Числа $1, 2, 3, \ldots, n$ записываются в строчку в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число k, то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел $k+1$ и $k-1$. Сколькими способами это можно сделать?

5. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 2021. Гриша хочет выбрать среди них 1010 так, чтобы сумма любых двух не равнялась 2021 или 2022. Сколько существует способов это сделать?

6. Назовём последовательность из 100 натуральных чисел хорошей, если любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1.
(а) Сколько существует хороших последовательностей с заданным первым членом, если числа могут быть не натуральными, а целыми?
(б) Сколько существует хороших последовательностей с наименьшим числом 1?
(в) Сколько существует хороших последовательностей, в которых встречается тройка?

Домашнее задание.

7. На столе лежат 100 различных карточек с числами $3, 6, 9, \ldots, 297, 300$ (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 5?

8. Преподаватель принес в школу белую клетчатую доску 8×8. Ученик раскрасил каждую клетку доски в красный, черный или синий цвет. Оказалось, что любой уголок из пяти клеток содержит и синюю, и красную, и черную клетку. Покажите, что способов так покрасить доску у ученика было хотя бы 6^8.