Китайская теорема об остатках-2.

Китайская теорема об остатках. Если числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое x, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_n \ (mod\ m_n) \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?

2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.

3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?

4. Найдите три последние цифры числа $2019^{2018^{2017^{\cdots^{2^1}}}}$.

5. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей. Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - a$ делится на n?

6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
   б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
   в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.

7. Пусть $k_1, k_2, \ldots k_n$ — попарно взаимно простые числа. Докажите, что уравнение $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$ имеет решение в натуральных числах.

8. Для любого конечного набора натуральных чисел $\{a_1, \ldots a_n\}$ докажите, что существует такое число b, чтобы для любого i произведение $a_i b$ будет степенью натурального числа.

Китайская теорема об остатках-2.

Китайская теорема об остатках. Если числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$ попарно взаимно просты, то для произвольных целых $a_1, a_2, \ldots, a_n$ существует такое x, что

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (mod\ m_1) \\ x \equiv a_2 \ (mod\ m_2) \\ \ldots \\ x \equiv a_n \ (mod\ m_n) \end{cases}$$

1. Вы предлагаете кому-нибудь задумать двузначное число и сказать Вам остатки от деления этого числа на 3, 5 и 7. Почему по этим данным вы сможете отгадать задуманное число?

2. Допишите к числу 523 три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7,8,9.

3. Сколько различных остатков дают квадраты целых чисел при делении на $3 \times 5 \times 8$?

4. Найдите три последние цифры числа $2019^{2018^{2017^{\cdots^{2^1}}}}$.

5. Пусть n — натуральное число, у которого ровно k различных простых делителей. Сколько существует попарно несравнимых по модулю n целых a таких, что $a^2 - a$ делится на n?

6. а) В арифметической прогрессии есть член, делящийся на 1000 и есть член, делящийся на 1001. Докажите, что в прогрессии есть член, делящийся на 1001000.
   б) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в ней есть число у которого есть 1000 различных простых делителей.
   в) Дана бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Докажите, что в этой прогрессии можно выделить миллион соседних членов, у каждого из которых хотя бы 1000 различных простых делителей.

7. Пусть $k_1, k_2, \ldots k_n$ — попарно взаимно простые числа. Докажите, что уравнение $x_1^{k_1} + x_2^{k_2} + \ldots + x_{n-1}^{k_{n-1}} = x_n^{k_n}$ имеет решение в натуральных числах.

8. Для любого конечного набора натуральных чисел $\{a_1, \ldots a_n\}$ докажите, что существует такое число b, чтобы для любого i произведение $a_i b$ будет степенью натурального числа.