Функция Эйлера и теорема Эйлера.

Определение. *Функция Эйлера (обозначается $\varphi(n)$) — это количество чисел от 1 до n, взаимно простых с n. Иными словами, это количество таких чисел в отрезке [1; n], наибольший общий делитель которых с n равен единице.*

Функция Эйлера.
Разбор 1-3.

1. p- простое число. Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^a)$?
2. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.
а) Сколько в таблице чисел, взаимно простых с b?
б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимно простых с a?
в) Используя таблицу докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
3. Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$?
4. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n— четно.
б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.
5. Решите уравнения
а) $\varphi(x) = 2$;
б) $\varphi(x) = 8$;
в) $\varphi(x) = 12$;
г) $\varphi(x) = 14$.

Теорема Эйлера. Пусть $m > 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда имеет место сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$.

1. Докажите, что $5^{6^7} - 1$ делится на 2016.
2. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?
3. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.
4. Пусть $a > 1,\ (a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n, что $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ делится на b.
5. а) Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.
б) Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.
6. Дано число 2^{2013} . Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
7. Докажите, что $2^{2^{\cdots^{2^2}}} - 2^{2^{\cdots^{2^2}}}$ (в первом слагаемом n двоек, во втором — $n - 1$) делится на все числа от 1 до n.
8. *Радикалом натурального числа N (обозначается $rad(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \times rad(ABC)$?

Функция Эйлера и теорема Эйлера.

Определение. *Функция Эйлера (обозначается $\varphi(n)$) — это количество чисел от 1 до n, взаимнопростых с n. Иными словами, это количество таких чисел в отрезке $[1; n]$, наибольший общий делитель которых с n равен единице.*

Функция Эйлера.
Разбор 1-3.

1. p- простое число. Чему равно $\varphi(p)$? А $\varphi(p^a)$?
2. В таблицу $a \times b$ выписаны все последовательные числа подряд начиная с 1, причем $(a, b) = 1$.
а) Сколько в таблице чисел, взаимнопростых с b?
б) Сколько в каждом столбце чисел, взаимнопростых с a?
в) Используя таблицу докажите, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.
3. Как вычислить $\varphi(n)$ для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$?
4. а) Докажите, что если $n > 2$, то число всех правильных несократимых дробей со знаменателем n— четно.
б) Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n.
5. Решите уравнения
а) $\varphi(x) = 2$;
б) $\varphi(x) = 8$;
в) $\varphi(x) = 12$;
г) $\varphi(x) = 14$.

Теорема Эйлера. Пусть $m > 1$ и $(a, m) = 1$. Тогда имеет место сравнение $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \ (mod\ m)$.

1. Докажите, что $5^{6^7} - 1$ делится на 2016.
2. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?
3. Докажите, что $(n^{84} - n^4)$ делится на 20400 для любого натурального n.
4. Пусть $a > 1,\ (a, b) = 1$. Докажите, что найдется такое n, что $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$ делится на b.
5. а) Докажите, что при любом нечетном n число $2^{n!} - 1$ делится на n.
б) Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.
6. Дано число 2^{2013} . Докажите, что можно приписать к нему слева несколько цифр так, чтобы получилась степень двойки.
7. Докажите, что $2^{2^{\cdots^{2^2}}} - 2^{2^{\cdots^{2^2}}}$ (в первом слагаемом n двоек, во втором — $n - 1$) делится на все числа от 1 до n.
8. *Радикалом натурального числа N (обозначается $rad(N)$) называется произведение всех простых делителей числа N, взятых по одному разу. Например, $rad(120) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Существует ли тройка попарно взаимно простых натуральных чисел A, B, C таких, что $A + B = C$ и $C > 1000 \times rad(ABC)$?