

## Дискретная непрерывность.

- За круглым столом равномерно сидят 100 дедов. Известно, что количество волос в бороде у любых двух соседних отличается не более, чем на 100. Докажите, что можно выбрать двух сидящих напротив дедов, у которых количество волос в бороде отличается не более, чем на 100.
- В футбольном матче первым забил «Спартак», а выиграло «Динамо». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.
- В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см. В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.
- В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько (не все) шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.
- В ряд сидит 30 школьников: 15 мальчиков и 15 девочек.
  - Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
  - По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. А можно ли выбрать 18 таких школьников?
- Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
- В строке четырехзначных чисел первое число 2013, последнее 2031. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?
  - А если дополнительно известно, что ни одно число не делится на 100, то обязательно ли будет хотя бы одно число делящееся на 101?
- В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.
- В некоторых клетках таблицы  $50 \times 50$  расставлены числа  $+1$  и  $-1$  таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате  $25 \times 25$  сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
- На плоскости отмечено 2016 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
  - Докажите, что можно провести прямую так, чтобы по одну сторону от неё лежало ровно 100 точек
  - Докажите, что можно нарисовать круг, внутри которого лежит ровно 100 точек
  - Докажите, можно построить 288 непересекающихся семиугольников с вершинами в этих точках
  - \* Покрасим эти точки в красный и синий цвет так, чтобы среди них было ровно 1008 красных и 1008 синих. Докажите, что можно провести прямую так, что с одной стороны от неё будет ровно 504 красных и 504 синих точки.
- Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем а) на 50-й день? б) на 25-й день?
- Пусть на плоскости расположены  $2n$  точек. Назовём медианой этого множества точек прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой находится одинаковое количество точек. Какое наименьшее количество медиан может иметь множество, состоящее из  $2n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

### Домашнее задание

- Матч «Бавария»–«Спартак» закончился со счётом 5 : 8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребёнком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.
- На окружности единичной длины отмечено 25 точек. Докажите, что найдётся дуга длины 0,4, внутри которой лежит ровно 10 точек.

## Дискретная непрерывность.

- За круглым столом равномерно сидят 100 дедов. Известно, что количество волос в бороде у любых двух соседних отличается не более, чем на 100. Докажите, что можно выбрать двух сидящих напротив дедов, у которых количество волос в бороде отличается не более, чем на 100.
- В футбольном матче первым забил «Спартак», а выиграло «Динамо». Докажите, что в какой то момент счет был ничейный.
- В ряд стоят несколько солдат. Рост соседей отличается не более чем на 2,4 см. В строю есть солдат ростом 152 см, и солдат ростом 198 см. Докажите, что есть солдат, чей рост отличается от 170 см не более, чем на 1,2 см.
- В ряд выложены 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько (не все) шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.
- В ряд сидит 30 школьников: 15 мальчиков и 15 девочек.
  - Докажите, что можно выбрать 10 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - Всегда ли из них можно выбрать 20 школьников подряд, среди которых мальчиков и девочек поровну?
  - По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. Докажите, что можно выбрать 20 школьников подряд, чтобы среди них мальчиков и девочек было поровну.
  - По кругу сидят 30 школьников, среди них мальчиков и девочек поровну. А можно ли выбрать 18 таких школьников?
- Существуют ли 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых ровно 5 простых чисел?
- В строке четырехзначных чисел первое число 2013, последнее 2031. Соседние числа отличаются на 1 или на 100. Верно ли, что хотя бы одно число делится на 101?
  - А если дополнительно известно, что ни одно число не делится на 100, то обязательно ли будет хотя бы одно число делящееся на 101?
- В бесконечной последовательности натуральных чисел каждое следующее число получается прибавлением к предыдущему одной из его ненулевых цифр. Докажите, что в этой последовательности найдется четное число.
- В некоторых клетках таблицы  $50 \times 50$  расставлены числа  $+1$  и  $-1$  таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате  $25 \times 25$  сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.
- На плоскости отмечено 2016 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.
  - Докажите, что можно провести прямую так, чтобы по одну сторону от неё лежало ровно 100 точек
  - Докажите, что можно нарисовать круг, внутри которого лежит ровно 100 точек
  - Докажите, можно построить 288 непересекающихся семиугольников с вершинами в этих точках
  - \* Покрасим эти точки в красный и синий цвет так, чтобы среди них было ровно 1008 красных и 1008 синих. Докажите, что можно провести прямую так, что с одной стороны от неё будет ровно 504 красных и 504 синих точки.
- Дракон заточил в темницу рыцаря и выдал ему 100 разных монет, половина из которых волшебные (какие именно – знает только дракон). Каждый день рыцарь раскладывает все монеты на две кучки (не обязательно равные). Если в кучках окажется поровну волшебных монет или поровну обычных, дракон отпустит рыцаря. Сможет ли рыцарь гарантированно освободиться не позже, чем а) на 50-й день? б) на 25-й день?
- Пусть на плоскости расположены  $2n$  точек. Назовём медианой этого множества точек прямую, проходящую ровно через две из них, по обе стороны от которой находится одинаковое количество точек. Какое наименьшее количество медиан может иметь множество, состоящее из  $2n$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

### Домашнее задание

- Матч «Бавария»–«Спартак» закончился со счётом 5 : 8. Муж (болеющий за «Баварию») и жена (болеющая за «Спартак») собираются посмотреть этот матч в записи по очереди, уже зная итоговый счёт: сначала смотрит муж (а жена сидит с ребёнком), а в некоторый момент они меняются. Докажите, что они смогут поменяться так, чтобы увидеть поровну мячей, забитых любимой командой.
- На окружности единичной длины отмечено 25 точек. Докажите, что найдётся дуга длины 0,4, внутри которой лежит ровно 10 точек.