

Алгебраические преобразования-1

1. Известно, что число $a + \frac{1}{a}$ – целое. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – тоже целое.
 2. Сравните числа $A = \frac{99^{999}+1}{99^{1000}+1}$ и $B = \frac{99^{1000}+1}{99^{1001}+1}$.
 3. Даны а) 3 числа б) 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?
 4. Запишите без "двухэтажных" радикалов
 - а) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$
 - б) $\sqrt{2\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}$
 - в) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$
 5. Вычислите $\sqrt{2015 \cdot 2017 \cdot 2019 \cdot 2021 + 16}$
 6. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2 - 8ab + 17b^2 - 16a - 4b + 2068$.
 7. Простое или составное число
 - а) $100^2 + 201$
 - б) $999 \dots 991$, где девяток 2021
 - в) $2^{10} + 5^{12}$?
 8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
 9. Положительные числа a, b, c таковы, что $a \geq b \geq c$ и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.
- Домашнее задание**
10. Известно, что $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$?
 11. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Алгебраические преобразования-1

1. Известно, что число $a + \frac{1}{a}$ – целое. Докажите, что число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ – тоже целое.
 2. Сравните числа $A = \frac{99^{999}+1}{99^{1000}+1}$ и $B = \frac{99^{1000}+1}{99^{1001}+1}$.
 3. Даны а) 3 числа б) 100 чисел. Когда каждое из них увеличили на 1, сумма их квадратов не изменилась. Каждое число ещё раз увеличили на 1. Изменится ли сумма квадратов на этот раз, и если да, то на сколько?
 4. Запишите без "двухэтажных" радикалов
 - а) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$
 - б) $\sqrt{2\sqrt{7} - 4\sqrt{3}}$
 - в) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}}$
 5. Вычислите $\sqrt{2015 \cdot 2017 \cdot 2019 \cdot 2021 + 16}$
 6. Найдите наименьшее значение выражения $2a^2 - 8ab + 17b^2 - 16a - 4b + 2068$.
 7. Простое или составное число
 - а) $100^2 + 201$
 - б) $999 \dots 991$, где девяток 2021
 - в) $2^{10} + 5^{12}$?
 8. Четыре подряд идущих числа перемножили и прибавили 1. Доказать, что получился точный квадрат.
 9. Положительные числа a, b, c таковы, что $a \geq b \geq c$ и $a + b + c \leq 1$. Докажите, что $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.
- Домашнее задание**
10. Известно, что $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}$. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc}$?
 11. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Верно ли, что все числа равны?

Алгебраические преобразования-2

1. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\dots(1+2^{1024})$.
2. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.
3. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов (5-хорошее $5 = 1^2 + 2^2$, 3 - нет). Докажите, что
 - а) удвоенное хорошее число будет хорошим
 - б) произведение двух хороших будет хорошим.
 - в) Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2 + y^2 = 19451945$.
4. Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

5. Докажите, что если

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (x, y, z, a, b, c - \text{отличны от } 0)$$

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
7. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$.

Домашнее задание

8. Числа x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}$$

Алгебраические преобразования-2

1. Вычислите $(1+2)(1+2^2)(1+2^4)(1+2^8)\dots(1+2^{1024})$.
2. Докажите, что к любому числу, равному произведению двух последовательных натуральных чисел, можно приписать в конце какие-то две цифры так, что получится квадрат натурального числа.
3. Назовем целое число хорошим, если оно представляется в виде суммы 2 квадратов (5-хорошее $5 = 1^2 + 2^2$, 3 - нет). Докажите, что
 - а) удвоенное хорошее число будет хорошим
 - б) произведение двух хороших будет хорошим.
 - в) Найдите пару натуральных чисел x и y таких, что $x^2 + y^2 = 19451945$.
4. Известно, что $a + b + c = 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Найдите $a^4 + b^4 + c^4$.

5. Докажите, что если

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (x, y, z, a, b, c - \text{отличны от } 0)$$

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$. Докажите, что каждое из трёх чисел ab, bc, ca является точным квадратом.
7. Выясните конечно или бесконечно число решений уравнения в натуральных числах $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 3$.

Домашнее задание

8. Числа x, y, z таковы, что $xyz = 1$. Вычислите значение выражения

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}$$