**9-я Иранская олимпиада по геометрии**

## Начинающие

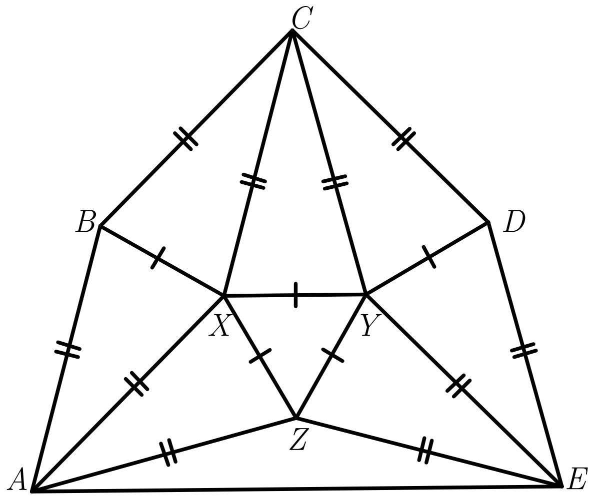
14 октября 2022 г.

---

**Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com**

---

**Задача 1.** Найдите углы пятиугольника $ABCDE$, изображённого на рисунке ниже.




**Задача 2.** Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Точки $E$ и $F$ лежат на сторонах $BC$ и $AD$, а точки $M$ и $N$ лежат на отрезке $EF$ так, что $DF = BE$ и $FM = NE$. Пусть $K$ и $L$ — основания перпендикуляров, опущенных из $M$ и $N$ на прямые $AB$ и $CD$ соответственно. Докажите, что $EKFL$ — параллелограмм.

**Задача 3.** Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник такой, что $AB = BC = CD$ и $\angle BDE = \angle EAC = 30°$. Найдите, какие значения может принимать $\angle BEC$.

**Задача 4.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$. Вписанные окружности треугольников $ABC$ и $ACD$ касаются друг друга внешним образом. Докажите, что $\angle ABC > 120°$. (Напомним, что вписанная окружность треугольника — это окружность внутри треугольника, касающаяся трёх его сторон.)

**Задача 5.** a) Существуют ли на плоскости четыре равносторонних треугольника такие, что каждые два из них имеют ровно одну общую вершину, но каждая точка плоскости принадлежит границе не более чем двух из них?

b) Существуют ли на плоскости четыре квадрата такие, что каждые два из них имеют ровно одну общую вершину, но каждая точка плоскости принадлежит границе не более чем двух из них?

(Обратите внимание, что в обоих пунктах задачи отсутствуют условия на пересечение внутренностей многоугольников.)

Продолжительность олимпиады: 4 часа.

За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.

**9-я Иранская олимпиада по геометрии**

## Продолжающие

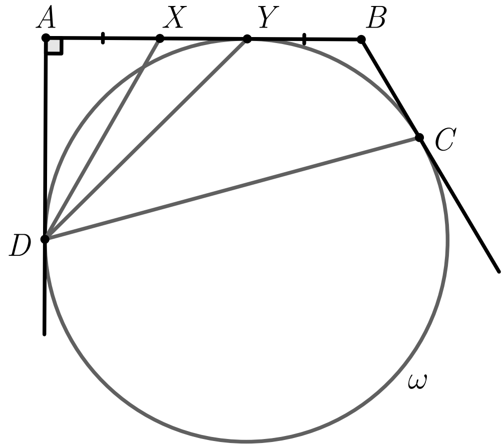
14 октября 2022 г.

---

**Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com**

---

**Задача 1.** На рисунке ниже дано $AX = BY$. Докажите, что $\angle XDA = \angle CDY$.




**Задача 2.** Две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ одинакового радиуса пересекаются в точках $E$ и $X$. На $\omega_1$ и $\omega_2$ выбраны произвольные точки $C$ и $D$ соответственно. Прямые, проходящие через $E$ параллельно $XC$ и $XD$, пересекают $\omega_2$ и $\omega_1$ в точках $A$ и $B$ соответственно. Прямая $CD$ вторично пересекает $\omega_1$ и $\omega_2$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABPQ$ вписанный.

**Задача 3.** Пусть $O$ — центр описанной окружности треугольника $ABC$. На сторонах $AC$ и $BC$ выбраны произвольные точки $M$ и $N$ соответственно. Точки $P$ и $Q$ лежат в той же полуплоскости относительно прямой $MN$, что и точка $C$, и удовлетворяю условию $\triangle CMN \sim$ $\sim \triangle PAN \sim \triangle QMB$ (подобия с указанным порядком вершин). Докажите, что $OP = OQ$.

**Задача 4.** Будем называть два многоугольника $P$ и $Q$ *совместимыми,* если существует натуральное число $k$ такое, что $P$ можно разбить на $k$ равных многоугольников, подобных $Q$, а $Q$ можно разбить на $k$ равных многоугольников, подобных $P$. Докажите, что для любых двух *чётных* целых чисел $m, n \geqslant 4$ существует пара совместимых многоугольников, у которых $m$ и $n$ сторон.
(Многоугольник — это часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений.)

**Задача 5.** Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность $\omega$ с центром в точке $O$. Диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $P$. На отрезке $OP$ выбрана точка $Q$. Пусть $E$ и $F$ — проекции $Q$ на прямые $AD$ и $BC$ соответственно. Точки $M$ и $N$ на описанной окружности треугольника $QEF$ таковы, что $QM \parallel AC$ и $QN \parallel BD$. Докажите, что прямые $ME$ и $NF$ пересекаются на серединном перпендикуляре к отрезку $CD$.

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.

**9-я Иранская олимпиада по геометрии**

# Профессионалы

14 октября 2022 г.

---

**Задания олимпиады запрещается распространять до их публикации на официальном сайте олимпиады: igo-official.com**

---

**Задача 1.** Четыре точки $A$, $B$, $C$ и $D$ лежат на окружности $\omega$ так, что $AB = BC = CD$. Касательная к $\omega$ в точке $C$ пересекает касательную к $\omega$ в точке $A$ и прямую $AD$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Окружность $\omega$ и описанная окружность треугольника $KLA$ вторично пересекаются в точке $M$. Докажите, что $MA = ML$.

**Задача 2.** Дан остроугольный треугольник $ABC$, в котором $AB \neq AC$. Пусть $D$ — точка на прямой $BC$ такая, что прямая $DA$ касается описанной окружности треугольника $ABC$. Пусть $E$ и $F$ — центры описанных окружностей треугольников $ABD$ и $ACD$ соответственно, а $M$ — середина отрезка $EF$. Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника $AMD$ в точке $D$ также касается описанной окружности треугольника $ABC$.

**Задача 3.** В треугольнике $ABC$ ($\angle A \neq 90^\circ$) точка $O$ — центр описанной окружности, а $H$ — основание высоты из вершины $A$. Обозначим середины отрезков $BC$ и $AH$ за $M$ и $N$ соответственно. Отметим точку $D$ — пересечение прямых $AO$ и $BC$, и $H'$ — точку, симметричную $H$ относительно $M$. Пусть описанная окружность треугольника $OH'D$ пересекает описанную окружность треугольника $BOC$ в точке $E$. Докажите, что прямые $NO$ и $AE$ пересекаются на описанной окружности треугольника $BOC$.

**Задача 4.** Пусть $ABCD$ — трапеция, в которой $AB \parallel CD$. Её диагонали пересекаются в точке $P$. Прямая, проходящая через $P$ параллельно $AB$, пересекает отрезки $AD$ и $BC$ в точках $Q$ и $R$ соответственно. Внешние биссектрисы углов $DBA$ и $DCA$ пересекаются в точке $X$. Пусть $S$ — основание перпендикуляра, опущенного из $X$ на прямую $BC$. Докажите, что если четырехугольники $ABPQ$ и $CDQP$ описанные, то $PR = PS$.

**Задача 5.** Пусть $ABC$ — остроугольный треугольник, вписанный в окружность $\omega$ с центром в точке $O$. Точки $E$ и $F$ лежат на сторонах $AC$ и $AB$ соответственно так, что $O$ лежит на прямой $EF$ и четырёхугольник $BCEF$ вписанный. Пусть $R$ и $S$ — пересечения прямой $EF$ с меньшими дугами $AB$ и $AC$ окружности $\omega$ соответственно. Точка $K$ симметрична $R$ относительно $C$, а точка $L$ симметрична $S$ относительно $B$. Точки $P$ и $Q$, лежащие на прямых $BS$ и $RC$ соответственно, таковы, что $PK$ и $QL$ перпендикулярны $BC$. Докажите, что окружность с центром $P$ и радиусом $PK$ касается описанной окружности треугольника $RCE$ тогда и только тогда, когда окружность с центром $Q$ и радиусом $QL$ касается описанной окружности треугольника $BFS$.

Продолжительность олимпиады: 4 часа 30 минут.
За полное решение каждой задачи даётся 8 баллов.