

## Полуописанная окружность

Окружность, проходящую через две вершины треугольника и касающуюся его вписанной окружности, будем называть *полуописанной*. Задача (1) даёт удобный способ построения такой окружности и используется в остальных задачах в качестве леммы.

1. В треугольнике  $ABC$  вписанная окружность  $\omega$  касается стороны  $BC$  в точке  $A_1$ . Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и касается окружности  $\omega$  в точке  $T$ . Точка  $S$  — середина дуги  $BC$  окружности  $\Omega_A$ , не содержащей точку  $T$ . Точка  $I_A$  — центр  $A$ -вневыписанной окружности треугольника  $ABC$ .
  - (а) Докажите, что точки  $S, A_1, T$  коллинеарны.
  - (б) Докажите, что точки  $I_A, S, A_1$  коллинеарны.
2. Вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $B_1, C_1$  соответственно. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и касается окружности  $\omega$  в точке  $T$ .
  - (а) Докажите, что окружность  $(TC_1B)$  проходит через  $A$ -эксцентр  $I_A$  треугольника  $ABC$ .
  - (б) (в сторону) Окружность  $(TC_1B)$  пересекает прямую  $BC$  в точках  $B$  и  $R$ . Докажите, что  $CR = CB_1$ .
3. Вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и касается окружности  $\omega$  в точке  $T$ . Докажите, что окружность  $(TCA_1)$  проходит через середину отрезка  $A_1C_1$ .
4. Вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и касается окружности  $\omega$  в точке  $T$ . Касательная к окружности  $\omega$  в точке  $T$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $X$ . Докажите, что точка  $X$  и середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  лежат на одной прямой.
5. Вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  и касается окружности  $\omega$  в точке  $T$ . Обозначим через  $M$  и  $N$  середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $BM, CN$ , и  $A_1T$  пересекаются в одной точке.
6. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  и касается его вписанной окружности в точке  $T_A$ . Аналогично определены окружности  $\Omega_B, \Omega_C$  и точки  $T_B, T_C$ . Докажите, что прямые  $AT_A, BT_B, CT_C$  имеют общую точку.
7. Вписанная окружность  $\omega$  касается сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$  в точках  $A_1, B_1, C_1$  соответственно. Окружность  $\Omega_A$  проходит через вершины  $B$  и  $C$ , касается окружности  $\omega$  в точке  $T$  и пересекает отрезки  $AB, AC$  вторично в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Обозначим через  $M$  и  $N$  середины отрезков  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$  соответственно. Прямые  $TM$  и  $TN$  второй раз пересекают окружность  $\Omega_A$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что прямые  $PX, QY, MN$  и  $AI$  пересекаются в одной точке.