Лемма о пропорциональных проекциях

1. Точки K и L — проекции середины M стороны BC остроугольного треугольника ABC на стороны AB и AC соответственно. Окружности (ABL) и (ACK) пересекаются в точках A и S. Докажите, что $AS \perp BC$.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Точки O и I_A — центры описанной и A-вневписанной окружностей. Докажите, что $B_1C_1 \perp OI_A$.

3. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его стороны BC в точке K. На сторонах AB, AC отмечены точки P и Q соответственно, что $AP = CK$, $AQ = BK$; AD — диаметр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $PQ \perp DI$.

4. Вписанная в остроугольный треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть AA' — диаметр описанной окружности треугольника ABC, а точка T — проекция точки A_1 на прямую B_1C_1. Докажите, что точки T, I, A' коллинеарны.

5. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках D и E соответственно и пересекает сторону BC. Точки F и G лежат на отрезке BC и таковы, что $BF = BD$, $CG = CE$. Прямые DG и EF пересекаются в точке K, а точка L на малой дуге DE окружности ω такова, что касательная в точке L к окружности ω параллельная BC. Докажите, что инцентр треугольника ABC лежит на прямой KL.

6. Дан треугольник ABC. Прямая, соединяющая точки касания B-вневписанной окружности с прямыми AC и BC, пересекает сторону AB в точке X. Прямая, соединяющая точки касания C-вневписанной окружности с прямыми AB и BC, пересекает сторону AC в точке Y. Докажите, что $XY \perp I_AH$, где точки H и I_A — ортоцентр и A-эксцентр треугольника ABC.

7. Окружность ω касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках D и E соответственно, причём $BD + CE < BC$. На стороне BC отмечены точки F и G так, что $BD = BF$, $CE = CG$. Прямые DG и FE пересекаются в точке K. На малой дуге DE окружности ω отмечена точка L, касательная в которой к окружности ω параллельна прямой BC. Докажите, что инцентр треугольника ABC лежит на прямой KL.

8. В остроугольном треугольнике ABC отметили середину M сторону BC. Окружность с центром M, проходящая через A, повторно пересекает AB и AC в точках P и Q соответственно. Касательные к этой окружности в точках P и Q пересекаются в точке D. Докажите, что серединный перпендикуляр к BC делит отрезок AD пополам.

9. Let D and E be points in the interiors of sides AB and AC, respectively, of a triangle ABC, such that $DB = BC = CE$. Let the lines CD and BE meet at F. Prove that the incentre I of triangle ABC, the orthocentre H of triangle DEF and the midpoint M of the arc BAC of the circumcircle of triangle ABC are collinear.