Новиночки

1. Точки A, B, C лежат на прямой ℓ в данном порядке. Полуокружности ω_1 и ω_2 с диаметрами AB и AC лежат по одну сторону от ℓ. Точка D на ω_2 такова, что $BD \perp AC$. Окружность с центром B, проходящая через D, пересекает ω_1 в точке E. Тогда F на AC такова, что $EF \perp AC$. Докажите, что $BC = BF$.

2. В треугольнике ABC провели описанную окружность ω. На дуге AC, не содержащей точку B, отметили точку N, а на прямой AB отметили точку S. Прямая, касающаяся ω в точке N пересекает BC в точке T, а прямая NS пересекает ω в точке K. Оказалось, что $\angle NTC = \angle KSB$. Докажите, что $CK \parallel AN \parallel TS$

3. Дан правильный девятиугольник $ABCDEFGHI$. Докажите, что $AB+AC = AE$.

4. Внутри треугольника ABC отметили точку D. Точки E и F — проекции D на AB и AC соответственно. Прямые BD и CD повторно пересекают описанную окружность ABC в точках M и Nсоответственно. Докажите, что

$$\frac{EF}{MN} \geqslant \frac{r}{R},$$

где r и R являются радиусами вписанной и описанной окружностей треугольника ABC.

5. In an acute scalene triangle ABC with incenter I, the line AI intersects the circumcircle again at D, and let J be a point such that D is the midpoint of IJ. Consider points E and F on line BC such that IE and JF are perpendicular to AI. Consider points G on AE and H on AF such that IG and JH are perpendicular to AE and AF, respectively. Prove that $BG = CH$.

6. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE, CF пересекаются в точке H. Окружность, проходящая через точки D, E и F повторно пересекает AD, BE и CF в точках X, Y и Z соответственно. Докажите, что

$$\frac{AH}{DX} + \frac{BH}{EY} + \frac{CH}{FZ} \geqslant 3.$$

7. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Точки D, E, F на сторонах BC, AC, AB таковы, что $\frac{DE}{20} = \frac{EF}{22} = \frac{FD}{38}$. Пусть точки X, Y, Z на сторонах BC, CA, AB соответственно таковы, что $XY \perp DE, YZ \perp EF, ZX \perp FD$. Найдите все возможные значения $\frac{1}{S_{DEF}} + \frac{1}{S_{XYZ}}$.