

## Разнойбой

1. Высоты  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Прямая  $CH$  пересекает полуокружность с диаметром  $AB$ , проходящую через точки  $A_1$  и  $B_1$ , в точке  $D$ . Отрезки  $AD$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $M$ ,  $BD$  и  $AA_1$  — в точке  $N$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $B_1DM$  и  $A_1DN$  касаются.
2. Дан треугольник  $ABC$ . На продолжениях сторон  $AB$  и  $CB$  за точку  $B$  взяты точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что  $AC = QC = PA$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $ABQ$  и  $CBP$  пересекаются на биссектрисе угла  $B$ .
3. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Описанная окружность треугольника  $O_1BO_2$  пересекает окружности в точках  $C$  и  $D$ , а прямую  $AB$  — в точке  $X$ . Докажите, что  $X$  является центром описанной окружности треугольника  $CAD$ .
4. Периметр треугольника  $ABC$  равен 1. Окружность  $\omega$  касается стороны  $BC$ , продолжения стороны  $AB$  в точке  $P$  и продолжения стороны  $AC$  в точке  $Q$ . Прямая, проходящая через середины  $AB$  и  $AC$ , пересекает описанную окружность треугольника  $APQ$  в точках  $X$  и  $Y$ . Найдите длину отрезка  $XY$ .
5. Точка  $M$  — середина основания  $AB$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точка  $P$  внутри треугольника такова, что  $\angle CAP = \angle ABP$ . Докажите, что  $\angle APM + \angle CPB = 180^\circ$ .
6. A triangle  $ABC$  with  $AB > AC$  is given,  $AD$  is the A-angle bisector with point  $D$  on  $BC$  and point  $I$  is the incenter of triangle  $ABC$ . Point  $M$  is the midpoint of segment  $AD$  and point  $F$  is the second intersection of  $MB$  with the circumcircle of triangle  $BIC$ . Prove that  $AF \perp FC$
7. Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ . Известно, что отрезок  $A_1B_1$  пересекает среднюю линию, параллельную  $AB$ , в точке  $C_2$ . Докажите, что отрезок  $CC_2$  перпендикулярен прямой, проходящей через точку пересечения высот и центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .
8. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CC_1$ , продолжение медианы  $AM$  пересекает описанную окружность в точке  $N$ . Точка  $D$  плоскости такова, что  $ABCD$  — параллелограмм. Докажите, что  $A, C_1, N, D$  лежат на одной окружности.
9. Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  в точках  $C_1$  и  $B_1$  соответственно; точка  $I_A$  — центр вневписанной окружности напротив вершины  $A$ . Точки  $C_2$  и  $B_2$  — середины отрезков  $I_AC_1$  и  $I_AB_1$  соответственно. Докажите, что прямые  $BC_2$  и  $CB_2$  пересекаются на описанной окружности треугольника  $ABC$ .