

Задачи с неравенствами

1. Дан четырёхугольник $ABCD$ причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD . Докажите, что $AM < MC$.
2. В треугольнике длины двух высот соответственно равны 12 и 20. Докажите, что длина третьей высоты меньше 30.
3. Точка пересечения медиан треугольника ABC обозначена через G . Выяснилось, что $\angle BGC < 90^\circ$. Докажите, что $AB + AC > 3 \cdot BC$.
4. Пусть M — точка пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника, N — точка пересечения его средних линий (отрезков, соединяющих середины противоположных сторон), а O — центр его описанной окружности. Докажите, что $OM \geq ON$.
5. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник ABC лежит внутри его серединного треугольника.
6. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) диагонали AC и BD пересекаются в точке S . Известно, что $\angle ASD = 120^\circ$. Докажите, что $AB + CD \geq AD$.
7. Внутри треугольника ABC взяли точку P такую, что

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$$

Пусть прямые AP, BP, CP повторно пересекают описанные окружности треугольников PBC, PCA, PAB в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что

$$S_{XBC} + S_{YCA} + S_{ZAB} \geq 3S_{ABC}$$

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD, BE, CF . Через X, Y, Z обозначим основания перпендикуляров из точек A, B, C на прямые EF, FD, DE соответственно. Докажите, что $P_{ABC} P_{XYZ} \geq (P_{DEF})^2$.