Про ортоцентр

Прямая Штейнера. Пусть точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Тогда точки, симметричные P относительно прямых AB, BC и AC, лежат на одной прямой, проходящей через ортоцентр треугольника ABC.

1. Пусть D — произвольная точка на стороне BC треугольника ABC. O_1, O_2, O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABD, ACD и ABC соответственно. Докажите, что **(а)** точки O_1, O_2, O_3 и A лежат на одной окружности, **(б)** ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой BC.

2. На отрезке AB треугольника ABC выбрана точка X. Докажите, что ортоцентр треугольника, образованного биссектрисами углов BAC, BXC и ABC лежит на прямой AB.

3. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 расположены так, что они имеют общую касательную, а также общие внутренние касательные к ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3 и одна из внешних касательных к ω_1 и ω_3 пересекаются в одной точке. Докажите, что ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на другой общей касательной ω_1 и ω_3.

4. Прямая ℓ пересекает прямые BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. O_1, O_2, O_3 — центры описанных окружностей треугольников AEF, BFD, CDE соответственно. Докажите, что ортоцентр треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой ℓ.

Точка анти-Штейнера. Пусть прямая ℓ проходит через ортоцентр H треугольника ABC. Тогда прямые, симметричные ℓ относительно сторон треугольника, пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

5. В треугольнике ABC провели диаметр AD. Через точку пересечения высот провели прямую, параллельную стороне BC, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что **(а)** периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC; **(б)** DEF — «бильярдная траектория» в фигуре, образованной лучами CA, CB и дугой ADB.

6. Дан треугольник ABC. Прямая ℓ касается вписанной в него окружности. Обозначим через ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c прямые, симметричные ℓ относительно биссектрис внешних углов треугольника. Докажите, что треугольник, образованный этими прямыми, равен треугольнику ABC.

7. **Лемма.** Прямая ℓ пересекает стороны острого угла ACB. Точки X_1 и X_2 симметричны произвольной точке X прямой ℓ относительно прямых CB и CA. Докажите, что все описанные окружности треугольников X_1X_2C проходят через одну точку.

8. **(EGMO 2017.6)** В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC G — точка пересечения медиан, O — центр описанной окружности. Точки, симметричные G и O относительно сторон BC, CA, AB обозначим G_1, G_2, G_3, и O_1, O_2, O_3 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A и ABC пересекаются в одной точке.

9. Точки X_1, X_2 и X_3 симметричны произвольной точке X относительно прямых CB, CA и AB соответственно. H — ортоцентр треугольника ABC. X не совпадает с H. Тогда описанные окружности треугольников X_1X_2C, X_1X_3B, X_2X_3A и ABC пересекаются в одной точке.

10. Дан треугольник ABC, O — его центр описанной окружности. Описанная окружность треугольника BOC пересекает стороны AB и AC в точках A_1 и A_2. Пусть ω_A — окружность, описанная около треугольника AA_1A_2. Аналогично определяются ω_B и ω_C. Докажите, что эти три окружности пересекаются на описанной окружности треугольника ABC.

---

11. **Прямая Обера.** Даны четыре прямые в общем положении. Тогда ортоцентры четырех образованных ими треугольников лежат на одной прямой.

12. H — точка пересечения высот AA' и BB' остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная AB, пересекает эти высоты в точках D и E, а сторону AB — в точке P. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на отрезке CP.

13. Стороны BC и AC треугольника ABC касаются соответствующих вневписанных окружностей в точках A_1, B_1. Пусть A_2, B_2 — ортоцентры треугольников CAA_1 и CBB_1. Докажите, что прямая A_2B_2 перпендикулярна биссектрисе угла C.