Разнобой по геометрии

1. Касательные к описанной окружности остроугольного треугольника ABC, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке S. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает сторону AB в точке T. Докажите, что прямые TS и BC параллельны.

2. Внутри равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отметили точку O. Окружность ω с центром O проходит черех точку C. Путь $\omega \cap BC = \{C, D\}$, $\omega \cap AC = \{C, E\}$. Пусть Γ – описанная окружность треугольника AEO. Пусть $\Gamma \cap \omega = \{E, F\}$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника BDF лежит на Γ.

3. В треугольнике ABC, в котором $AC = 2AB$, проведена биссектриса AD (точка D лежит на стороне BC). Прямая, проходящая через точку C и параллельная прямой AB, пересекает прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой AD, в точке E. Докажите, что прямая DE проходит через середину отрезка AC.

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ отметили точку O пересечения диагоналей. Докажите, что сумма длин перпендикуляров из O на стороны четырехугольника не больше, чем полупериметр четырехугольника.

5. В остроугольном треугольнике ABC ($AB > AC$) отмечен центр O описанной окружности и проведена высота AD. Докажите, что площади четырёхугольников $AODB$ и $AODC$ (возможно, невыпуклых) равны.

6. Окружность с центром в точке O касается основания BC равнобедренного треугольника ABC в точке B и проходит через точку A. На прямой AB отмечена точка D так, что $\angle ACD = 90°$. Докажите, что отрезок OD виден из середины отрезка BC под прямым углом.

7. Дан описанный четырехугольник $ABCD$. На биссектрисе угла B внутри треугольника ABC нашлась единственная точка E такая, что $DE \perp AC$. Из точки E на сторону AB опущен перпендикуляр EH. Докажите, что треугольник ADH — равнобедренный.

8. В треугольнике ABC отмечена середина M стороны BC, а на стороне AB выбрана точка P. Лучи PM и AC пересекаются в точке Q. Точка N — середина отрезка PQ. Прямая AN второй раз пересекает окружность (ABC) в точке S, отличной от N. Докажите, что окружность (MNS) касается прямой BC.

9. Вписанная окружность ω остроугольного треугольника ABC касается его сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На прямой B_1C_1 отмечены такие точки M и N, что $\angle MBC = \angle NCB = 90°$. Прямые A_1M и A_1N второй раз пересекают окружность ω в точках P и Q соответственно. Прямые CP и BQ пересекаются в точке X. Докажите, что прямая A_1X содержит медиану треугольника A_1MN.