

Разнобой по геометрии

1. Пусть AL – биссектриса треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает описанную окружность ABC в точках P и Q . Докажите, что описанная окружность треугольника PLQ касается стороны BC .
2. Дан правильный треугольник ABC . Прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D – центр правильного треугольника PMB , точка E – середина отрезка AP . Найдите углы треугольника DEC .
3. В треугольнике ABC угол A равен 60° . На сторонах AB и AC выбраны точки K и L соответственно так, что $BK = KL = LC$. Докажите, что угол KLC в два раза больше угла ABC .
4. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке S . Точки P и Q являются серединами AD и BC соответственно. Докажите, что прямые, проходящие через точки P, Q и S перпендикулярно прямым AC, BD и CD соответственно, пересекаются в одной точке.
5. В разностороннем остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 . Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P , а прямая, проведенная через A_1 параллельно B_1C_1 , пересекает AB и AC в точках Q и R соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения описанных окружностей треугольников $A_1B_1C_1$ и PQR лежит на BC .
6. Пусть B_0 – середина стороны AC треугольника ABC . Проведём из середины отрезка AB_0 перпендикуляр к стороне BC , а из середины отрезка B_0C перпендикуляр к стороне AB . Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через B' . Аналогично построим точки C' и A' . Докажите, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.
7. Окружность ω , вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC, AC и AB в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекают серединный перпендикуляр к отрезку AA_0 в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на окружности ω .
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $PQ \parallel BC$. Отрезки BQ и CP пересекаются в точке O . Точка A' симметрична точке A относительно прямой BC . Отрезок $A'O$ пересекает окружность ω , описанную около треугольника APQ , в точке S . Докажите, что окружность, описанная около треугольника BSC , касается ω .
9. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки D и E , соответственно, такие, что $DB = BC = CE$. Прямые CD и BE пересекаются в точке F . Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC , H – ортоцентр треугольника DEF , а M – середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что I, H и M лежат на одной прямой.