

Слабая теорема Кэзи

Теорема Кэзи, слабая версия. Предположим, что на плоскости даны окружность ω и три точки A, B, C вне неё, не лежащие на одной прямой. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Тогда окружность (ABC) касается окружности ω в том и в только в том случае, если для некоторой расстановки знаков «+» и «-» выполнено соотношение

$$\pm t_a BC \pm t_b CA \pm t_c AB = 0.$$

1. Окружность ω касается меньшей дуги BC описанной окружности равностороннего треугольника ABC внешним образом. Обозначим длины отрезков касательных из точек A, B, C к окружности ω через t_a, t_b, t_c соответственно. Докажите, что $t_a = t_b + t_c$.
2. Теорема Фейербаха Докажите, что в неравностороннем треугольнике ABC окружность девяти точек касается (а) вписанной окружности; (б) трёх внеписанных окружностей.

Точка касания вписанной окружности треугольника с окружностью девяти точек называется *точкой Фейербаха*.

3. Докажите, что в неравностороннем треугольнике расстояние от точки Фейербаха до середины одной из сторон равно сумме расстояний от точки Фейербаха до середин двух других.
4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle ACB = 90^\circ$) проведена высота CD . Окружность ω касается отрезков AD и AC в точках M и N соответственно и касается окружности (BDC) внешне. Докажите, что $BM = BC$.
5. Хорды AC и BD окружности Ω пересекаются в точке X . Докажите, что радикальная ось окружностей, вписанных в криволинейные треугольники $AХВ$ и $СХD$, проходит через середины дуг BC и DA .
6. Точка X на стороне AB треугольника ABC такова, что $AX = AI$, где I — инцентр ABC . Окружность ω , вписанная в угол BAC , содержит точку X . Окружность Ω проходит через точки B и C и касается ω внутренним образом. Докажите, что центр Ω лежит на (ABC) .
7. Let AB be the diameter of a circle Γ and let C be a point on Γ different from A, B . Let D be the foot of perpendicular from C to AB . Let K be a point on the segment CD such that AC is equal to the semi perimeter of ADK . Show that the excircle of ADK opposite to A is tangent to Γ
8. Внеписанная окружность ω_B треугольника ABC касается продолжения стороны BC за точку C в точке K . Окружность ω касается окружности ω_B внутренним образом в точке K , а диаметр окружности ω равен длине высоты треугольника ABC из вершины A . Докажите, что окружности ω и (ABC) касаются.