

Проективные преобразования

1. (*Теорема Дезарга*) Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой (считайте, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ невырожденные).
2. (*Теорема о триаде перспективных треугольников*) Два треугольника назовём *перспективными*, если прямые, соединяющие их соответственные вершины, пересекаются в одной точке. Известно, что треугольники ABC и $A'B'C'$ перспективны и треугольники ABC и $B'C'A'$ перспективны. Докажите, что треугольники ABC и $C'A'B'$ тоже перспективны.
3. Точка M_0 лежит на стороне AB четырёхугольника $ABCD$. Точка M_1 — проекция точки M_0 из точки D на прямую BC , точка M_2 — проекция точки M_1 из точки A на прямую CD , точка M_3 — проекция точки M_2 из точки B на прямую DA , точка M_4 — проекция точки M_3 из точки C на прямую AB и т. д. Докажите, что $M_{12} = M_0$.
4. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Из точек A_1 , B_1 , C_1 провели касательные A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 к вписанной окружности, отличные от сторон треугольника. Докажите, что прямые AA_2 , BB_2 и CC_2 пересекаются в одной точке.
5. Внутри окружности отмечена точка S , через которую проходят хорды AC , BD , $A'C'$, $B'D'$. Отрезки AB и $A'B'$ пересекаются в точке X , отрезки CD и $C'D'$ — в точке Y . Докажите, что точки X , Y , S коллинеарны.
6. Вписанная в треугольник ABC окружность ω касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 . Внутри окружности ω отмечена точка P . Отрезки AP , BP , CP пересекают ω в точках A' , B' , C' . Докажите, что прямые A_1A' , B_1B' , C_1C' пересекаются в одной точке. *Обратите внимание, что поляр точки P может пересекать треугольник ABC .*
7. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке J . Прямая AA_1 второй раз пересекает окружность ω в точке T . Касательная к ω в точке T пересекает стороны AB , AC в точках P и Q . Отрезки PJ и QJ пересекают ω в точках X и Y . Докажите, что прямые PQ , XY , BC пересекаются в одной точке или попарно параллельны.
8. Выпуклый четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности ω . Пусть PQ — диаметр ω , перпендикулярный прямой AC . Известно, что прямые BP и DQ пересекаются в точке X , а прямые BQ и DP — в точке Y . Докажите, что точки X и Y лежат на прямой AC .
9. Докажите, что любой выпуклый пятиугольник проективно эквивалентен пятиугольнику, образованному точками пересечения его диагоналей.