Гармонические четверки

1. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса AL. В треугольники ABL и ACL вписаны окружности β и γ соответственно. Вторая общая внешняя касательная к окружностям β и γ пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что прямая AK — внешняя биссектриса угла BAC.

2. Пусть H_B — основание высоты треугольника ABC, проведённой из вершины B; L_B — основание соответствующей биссектрисы; K_B — точка касания вписанной окружности со стороной B; T_B — точка касания вневписанной окружности со стороной AC. Точки H_A, L_A, K_A, T_A определяются аналогично. Докажите, что **(а)** $(H_B, L_B, K_B, T_B) = -1$; **(б)** $(C, H_B, T_B, K_B) = (C, H_A, T_A, K_A)$ **(в)** прямые $H_AH_B, L_AL_B, K_AK_B, T_AT_B$ конкурентны.

3. Некоторая окружность, проходящая через вершины B и C треугольника ABC, повторно пересекает отрезки AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке A_1. Докажите, что окружность $(A_1B_1C_1)$ проходит через середину отрезка BC.

4. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются друг друга внешним образом по циклу. Окружность ω касается их всех внешним образом в точках X_1, X_2, X_3, X_4 соответственно. Докажите, что $X_1X_2X_3X_4$ образуют гармонический четырехугольник.

5. Окружность ω касается равных сторон AB и AC равнобедренного треугольника ABC и пересекает отрезок BC в точках K и L. Отрезок AK пересекает окружность ω второй раз в точке M. Точки P и Q симметричны точке K относительно точек B и C соответственно. Докажите, что окружность (PMQ) касается окружности ω.

6. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точку M проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке A, вторую — в точке B (точка M лежит на отрезке AB). Точки U и V — середины дуг AN и BN, не содержащих точку M. Докажите, что окружность (UVM) проходит через середину отрезка AB.

7. Докажите, что точка Лемуана треугольника ABC (т. е. точка пересечения симедиан) лежит на прямой, соединяющей середину высоты из вершины A с серединой стороны BC.

8. Вневписанная окружность остроугольного треугольника ABC имеет центр в точке I_A и касается отрезка BC в точке K. Точка M — середина отрезка I_AK, точка N — середина меньшей дуги BC окружности (ABC). Прямая MN повторно пересекает окружность (ABC) в точке X. Полувписанная окружность касается отрезков AB, AC и касается окружности (ABC) в точке T. Докажите, что точки X, T, I_A коллинеарны.