

Разнойбой

1. Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник. На продолжении гипотенузы AB за точку A взята точка D такая, что $AB = 2AD$. Точки M и N на стороне AC таковы, что $AM = NC$. На стороне CB за точку B взята точка K такая, что $CN = BK$. Найдите угол между прямыми NK и DM .
2. Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые, пересекающие описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 . Точки A_2, B_2, C_2 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно сторон BC, CA, AB . Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.
3. В остроугольном треугольнике ABC ($AB < BC$) точка O – центр описанной окружности, BH_b – высота. Прямая, проходящая через H_b параллельно прямой CO , пересекает прямую BO в точке X . Докажите, что точка X и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.
4. Точки A и P лежат вне прямой ℓ . Рассматриваются всевозможные прямоугольные треугольники ABC с гипотенузой BC , лежащей на ℓ . Докажите, что описанные окружности треугольников PBC имеют общую точку, отличную от P .
5. В треугольнике ABC O – центр описанной окружности, I – центр вписанной. Прямая, проходящая через I и перпендикулярная OI , пересекает AB в точке X , а внешнюю биссектрису угла C – в точке Y . В каком отношении I делит отрезок XY ?
6. Окружность ω с центром O вписана в угол BAC и касается его сторон в точках B и C . Внутри угла BAC выбрана точка Q . На отрезке AQ нашлась такая точка P , что $AQ \perp OP$. Прямая OP пересекает окружности ω_1 и ω_2 , описанные около треугольников BPQ и CPQ , вторично в точках M и N . Докажите, что $OM = ON$.
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K – середина отрезка MN , а точка H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.