Изогональное сопряжение в четырехугольнике

Теорема. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечена точка P. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

(2) Проекции точки P на прямые AB, BC, CD, DA лежат на одной окружности.

(3) Существует точка, изогонально сопряжённая точке P относительно $ABCD$.

1. Докажите равносильность условий теоремы **(а)** $(1) \Longleftrightarrow (2)$; **(б)** $(2) \Longleftrightarrow (3)$.

2. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O.
(а) Серединный перпендикуляр к отрезку AH пересекает стороны AB и AC в точках E и F. Докажите, что прямая OA — биссектриса угла EOF.
(б) Пусть $\angle BAC = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AO пересекает стороны AB и AC в точках U и V. Докажите, что прямая HA — биссектриса угла UHV.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ Обозначим через I_A, I_B, I_C и I_D центры вписанных окружностей ω_A, ω_B, ω_C и ω_D треугольников DAB, ABC, BCD и CDA соответственно. Оказалось, что $\angle BI_AA + \angle I_CI_AI_D = 180°$. Докажите, что $\angle BI_BA + \angle I_CI_BI_D = 180°$.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD не является биссектрисой ни угла ABC, ни угла CDA. Точка P внутри четырехугольника $ABCD$ такова, что $\angle PBC = \angle DBA$ и $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что $ABCD$ вписан тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

5. Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке I. На отрезках AI, CI отмечены точки X и Y так, что $\angle XBY = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что $\angle XDY = \frac{1}{2}\angle ADC$.

6. Внутри окружности Ω отмечена точка K. Рассматриваются все хорды AB окружности Ω такие, что $\angle AKB = 90°$. Докажите, что проекции точки K на всевозможные хорды AB лежат на одной окружности.

7. В описанном четырехугольнике $ABCD$ проведены пересекающиеся в точке P отрезки AM и DN, где точки M и N лежат на стороне BC. В треугольники MNP, APD, ABM и DCN вписаны окружности. Докажите, что их центры лежат на одной окружности.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту из вершины A в точке K. Точки P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Прямые PO и BC пересекаются в точке X. Окружность (BCM) пересекает прямую AB в точках B и Y. Докажите, что четырёхугольник $BXOY$ — вписанный.

9. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AH и диаметр AD описанной окружности. Точка I — центр вписанной окружности. Докажите, что $\angle BIH = \angle DIC$.