Линейное движение

Предположим, что для каждого числа $t \in \mathbb{R}$ задано положение точки A_t (либо прямой ℓ_t) на плоскости.

Будем говорить, что точка A_t *движется линейно*, если ее координаты являются линейными функциями от t.

Также будем говорить, что прямая $\ell(t)$ движется линейно, если она задается уравнением $y = k \cdot x + b(t)$, где $b(t)$ — линейная функция (или же уравнением $x = b(t)$).

1. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AB, AC в точках C_1, B_1 соответственно. На отрезках BC_1, AB_1 отмечены точки P и Q соответственно так, что $PC_1 = QB_1$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой B_1C_1.

2. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются точке H. Прямая ℓ, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок BC в точке S и пересекает отрезки BB_1 и CC_1 в точках D и E. Докажите, что ортоцентр треугольника DEH лежит на прямой AS.

3. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая, перпендикулярная стороне BC, пересекает отрезок AB и прямую AC в точках U и V соответственно. Докажите, что точки A, O и середины отрезков BU и CV лежат на одной окружности.

4. **(Теорема Монжа)** Докажите, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон вписанного четырёхугольника на противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

5. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C равны. На сторонах AB и BC нашлись соответственно точки M и N такие, что $MN \| AD$ и $MN = 2AD$. Пусть K — середина отрезка MN, а точка H — ортоцентр треугольника ABC. Докажите, что прямые KH и CD перпендикулярны.

7. **(а)** **(Прямая Гаусса)** На плоскости проведено четыре прямые общего положения. Докажите, что середины трёх отрезков, соединяющих точку пересечения двух прямых с точкой пересечения двух оставшихся (и так для трёх разбиений прямых на пары), лежат на одной прямой.

(б) **(Прямая Обера)** Докажите, что ортоцентры четырёх треугольников, образованных четырьмя прямыми общего положения, лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой Гаусса этих четырёх прямых.

8. На высотах остроугольного треугольника ABC из вершин A, B, C отметили точки $A_1, B_1, C-$ 1 соответственно, а H — ортоцентр. Докажите, что A_1, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности тогда и только тогда сумма площадей треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1 равна площади треугольника ABC.