Аффинные преобразования

Определение. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно взаимно однозначно (биективно), непрерывно и образом любой прямой является прямая.

1. Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

2. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, где A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D соответственно при аффинном преобразовании.

В качестве следствия получаем, что аффинное преобразование корректно определено на множестве всех векторов плоскости.

3. (*Линейность*) Докажите, что **(а)** $(\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}' + \vec{v}'$; **(б)** $(q \cdot \vec{u})' = q \cdot \vec{u}'$ для любого $q \in \mathbb{Q}$; **(в)** $(\lambda \cdot \vec{u})' = \lambda \cdot \vec{u}'$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ (в последнем пункте используйте непрерывность).

Следствие: аффинное преобразование на каждой прямой сохраняет отношения отрезков.

4. *Репéром* называется набор из точки и двух неколлинеарных векторов. На плоскости даны два репера. Докажите, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее один репер в другой.

Эта задача вместе со свойством линейности позволяет дать следующее эквивалентное определение аффинного преобразования: преобразование f называется *аффинным*, если на плоскости существуют две декартовы не обязательно прямоугольные системы координат такие, что координаты произвольной точки A в первой системе совпадают с координатами точки $f(A)$ во второй системе.

5. (*Координатное описание*) На плоскости определена декартова не обязательно прямоугольная система координат. Докажите, что класс преобразований, заданных формулами вида
$$\begin{aligned} x' &= ax + by + x_0, \\ y' &= cx + dy + y_0, \end{aligned} \qquad \text{где } ad - bc \neq 0,$$
совпадает с классом аффинных преобразований.

6. **(а)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей двух треугольников, у которых есть пара параллельных сторон. **(б)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей любых двух треугольников. **(в)** Докажите, что аффинное преобразование сохраняет отношения площадей любых двух многоугольников.

Теорема. Любое взаимно однозначное отображение плоскости в себя, сохраняющее коллинеарность любых трёх коллинеарных точек, на самом деле аффинно.

Две фигуры называются *аффинно эквивалентными*, если одну из них можно перевести в другую некоторым аффинным преобразованием.

7. Докажите, что любые два треугольника аффинно эквивалентны.

8. Докажите, что два четырехугольника аффинно эквивалентны тогда и только тогда, когда диагонали этих четырехугольников делятся точками пересечения в соответственно равных отношениях.

9. В трапеции $ABCD$ на диагоналях AC и BD отметили такие точки P и Q, что $BP \parallel CD$ и $CQ \parallel AB$. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

10. Через каждую вершину треугольника ABC проведены две прямые, делящие противоположную сторону на три равные части. Докажите, что три прямые, соединяющие противоположные вершины полученного шестиугольника, пересекаются в одной точке.

11. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены пары точек A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 соответственно. Известно, что $A_1B_2 \parallel AB$, $B_1C_2 \parallel BC$, $C_1A_2 \parallel CA$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равновелики.

12. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Через точки B, C, D проведены прямые b, c, d, параллельные прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

13. Про выпуклый пятиугольник $ABCDE$ известно, что каждая его сторона параллельна одной из его диагоналей. Прямая ℓ_A соединяет вершину A с точкой пересечения отрезков BD и CE, аналогично определены прямые ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D, ℓ_E. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D, ℓ_E имеют общую точку.

14. Докажите, что если у выпуклого пятиугольника каждая сторона параллельна одной из его диагоналей, то его можно аффинным преобразование перевести в правильный.

15. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда треугольники ACE и BDF равновелики.