Геометрический разнобой

1. I – инцентр треугольника ABC. Перпендикуляр к AI в точке I пересекает стороны AC и BC в точках B' и C' соответственно. Точки B_1 и C_1 лежат на лучах BC и CB соответственно таким образом, что $AB = BB_1$ и $AC = CC_1$. Докажите, что если T – вторая точка пересечения окружностей AB_1C' и AC_1B', то центр описанной окружности треугольника ATI лежит на прямой BC.

2. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Его диагонали пересекаются в точке K. Окружность с центром на отрезке OK пересекает сторону AB в точках A_1, B_1, а сторону CD – в точках C_1, D_1. Докажите, что если точки A_1, K, C_1 лежат на одной прямой и $A_1K \neq KC_1$, то точки B_1, K, D_1 также лежат на одной прямой.

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Окружность ω касается отрезка MA в точке P, отрезка MD – в точке Q и окружности $ABCD$ в точке X. Докажите, что X лежит на радикальной оси окружностей (ACQ) и (BDP).

4. Пусть I и H – центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC. Точка P на BC такова, что $PI \perp AI$, M – середина AP. Окружность с диаметром IM пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках U и V. Докажите, что точки U, V и H лежат на одной прямой.

5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках X и Y, лежат внутри окружности Ω и касаются ее в точках A и B. Прямая AB повторно пересекает окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Вписанная в криволинейный треугольник CDX окружность касается стороны CD в точке Z. Докажите, что XZ – биссектриса угла AXB.

6. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, пересекает Γ_1 и Γ_2 в точках C и D соответственно. Обозначим за P точку пересечения касательных к Γ_1 в A и C, а Q – точку пересечения касательных к Γ_2 в A и D. Окружности (BCP) и (BDQ) вторично пересекаются в точке X, а прямые AB и PQ пересекаются в точке Y. Докажите, что C, D, X и Y лежат на одной окружности.

7. Точка A' диаметрально противоположна вершине A на описанной окружности треугольника ABC. На стороне BC во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник BCD. Перпенликуляр к $A'D$, восстановленный в точке A', пересекает прямые CA и AB в точках E и F. На отрезке EF построен равнобедренный треугольник ETF с $\angle ETF = 120°$ (точки A и T по разные стороны от EF). Докажите, что AT проходит через центр окружности девяти точек треугольника ABC.

8. Внутри треугольника ABC дана точка P. Предположим, что L, M, N – середины сторон BC, CA и AB соответственно и $PL : PM : PN = BC : CA : AB$. Продолжения AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках D, E и F соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников APF, APE, BPF, BPD, CPD, CPE лежат на одной окружности.