

Быстрый поиск идей
06 января 2023 г.

1. Докажите, что для каждого натурального n существует n -значное число, кратное 5^n , все цифры которого нечётны.

2. Точка I — инцентр неравобедренного треугольника ABC . Три концентрические окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c$ с центром в точке I проходят через вершины A, B, C соответственно и высекают на прямых BC, CA, AB соответственно хорды длин a, b, c соответственно. Докажите, что $a + b + c = BC + CA + AB$.

3. Ожерелье состоит из 239^{2023} различных бусинок. За одну операцию разрешается разрезать ожерелье на равные по длине куски, в каждом куске поменять порядок следования бусин на обратный и вернуть куски на свои места, замкнув обратно в кольцо. Любой ли порядок следования бусин можно получить такими операциями?

4. В классе 20 школьников. Было устроено несколько экскурсий, в каждой из которых участвовал хотя бы один школьник этого класса. Докажите, что найдётся такая экскурсия, что каждый из участвовавших в ней школьников этого класса принял участие по меньшей мере в $1/20$ всех экскурсий.

5. Положительные числа x и y при некотором натуральном n удовлетворяют

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + y + y^2 + y^3 + \dots + y^n = 2n.$$

Докажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2$.

6. Можно ли на клетчатой плоскости провести бесконечно много прямых так, чтобы любые две из них пересекались в узле решётки, но никакие три не проходили через одну точку?

7. Каким наименьшим числом клетчатых полос ширины 1 можно оклеить поверхность клетчатого куба $n \times n \times n$ ровно в один слой? Полосы состоят из целого числа клеток; каждая клетка куба должна быть целиком покрыта какой-то клеткой полосы.

8. Паша перемножил все делители натурального числа n . Техник увеличил каждый делитель числа n на 1, а потом перемножил результаты. Произведение Техника нацело делится на Пашино. Чему может быть равно n ?