Вспомним о ТЧ
06 января 2023 г.

1. Пусть $\sqrt{3} = 1.b_1 b_2 b_3 \ldots_{(2)}$ — двоичная запись числа $\sqrt{3}$. Докажите, что для каждого натурального n хотя бы одна из цифр b_n, b_{n+1}, $\ldots$, b_{2n} равна 1.

2. Обозначим через S множество всех натуральных чисел n, для которых число n^4 имеет натуральный делитель из отрезка $[n^2+1, n^2+2n]$. Докажите, что в множестве S бесконечно много чисел каждого из видов $7m+1, 7m+2, 7m+5, 7m+6, 7m+7$ и нет ни одного числа видов $7m+3$ и $7m+4$ (везде $m \in \mathbb{N}$).

3. Натуральное число n называется *ziba*, если любое натуральное число $k \leqslant n$ можно представить в виде суммы различных натуральных делителей числа n. Докажите, что среди чисел вида $m^2+m+2022$ ($m \in \mathbb{N}$) бесконечно много ziba numbers.

4. Натуральные числа x, y, z. Докажите, что если число $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ — точный квадрат, то и все три сомножителя $xy+1$, $yz+1$, $zx+1$ — точные квадраты.