Быстрый поиск идей
05 января 2023 г.

1. Натуральное число n таково, что числа $3n+1$ и $10n+1$ — точные квадраты. Докажите, что число $29n+11$ — составное.

2. Существует ли такой выпуклый многогранник, все грани которого — треугольники или шестиугольники, который можно разрезать на две части и сложить из них куб?

3. На 115 карточках написаны целые числа $1, 2, \ldots, 115$; на каждой карточке — одно число (продублировано с обеих сторон). Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на соседних карточках равна либо n, либо m. Выяснилось, что для данных m и n есть лишь один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано число 19?

4. Может ли множеством значений дробно-рациональной функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, оказаться луч $[\sqrt{2}, +\infty)$?

5. На крайней левой клетке доски 1×40 стоит фишка. Два игрока по очереди двигают фишку вдоль доски, за ход разрешается перетащить фишку вправо или влево на любое число клеток, которое не встречалось при выполнении предыдущих ходов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Положительные числа $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$ удовлетворяют неравенству

$$(x_1 + \ldots + x_n) \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) < n^2 + 1.$$

Докажите, что любые три из этих чисел — длины сторон некоторого треугольника.

7. Каждый из узлов бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашен в один из двух цветов: чёрный или белый. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлом, имеющее центр симметрии.

8. Доска 10×10 заполнена натуральными числами от 1 до 100: в первой строке слева-направо стоят числа от 1 до 10, во второй — от 11 до 20, …, в десятой — от 91 до 100. Петя мысленно разрезал доску на 50 доминошек, внутри каждой доминошки перемножил два числа и сложил полученные 50 произведений. Вася по-своему мысленно разрезал доску на доминошки и вычислил то же самое для своего разрезания. Докажите, что если в разрезаниях ребят поровну вертикальных доминошек, то и финальные результаты у них одинаковые.