

Геометрия
05 января 2023 г.

1. В остроугольном треугольнике ABC с наименьшей стороной BC отмечены ортоцентр H и центр O описанной окружности. Окружность (AHC) пересекает прямую AB в точках A и X , окружность (AHB) пересекает прямую AC в точках A и Y . Докажите, что центр окружности (XHY) лежит на прямой OH .

2. Let $ABCD$ be a parallelogram. Point E lies on segment CD such that

$$2\angle AEB = \angle ADB + \angle ACB,$$

and point F lies on segment BC such that

$$2\angle DFA = \angle DCA + \angle DBA.$$

Let K be the circumcenter of triangle ABD . Prove that $KE = KF$.

3. Остроугольный треугольник ABC ($AB < AC$) вписан в окружность с центром в точке O . На биссектрисе угла $\angle BAC$ отмечена точка D , а на стороне BC — точка E так, что $OE \parallel AD$, $DE \perp BC$. На луче EB нашлась точка K , что $EK = EA$. Окружность (ADK) вторично пересекает прямую BC в точке P и пересекает окружность (ABC) второй раз в точке Q . Докажите, что прямая PQ касается окружности (ABC) .

4. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность Ω , а точка I — его инцентр. Луч AI пересекает отрезок BC в точке D и пересекает окружность Ω в точке M . Окружность, построенная на отрезке DM как на диаметре, пересекает Ω второй раз в точке K . Прямые MK и BC пересекаются в точке S . Точка N — середина отрезка IS . Окружности (KID) и (MAN) пересекаются в точках L_1 и L_2 . Докажите, что Ω проходит через середину одного из отрезков IL_1 или IL_2 .