Неконвенциональная комбинаторика
04 января 2023 г.

1. На белой клетчатой плоскости изначально n клеток закрашены чёрным. Каждую минуту каждая клетка плоскости смотрит на своих соседей справа и сверху, и если оба соседа одного цвета, а она — другого, то она в этот цвет и перекрашивается (все перекрашивания происходят одновременно). Докажите, что через n минут чёрных клеток на доске не останется.

2. В пространстве дан выпуклый многогранник, сумма телесных углов которого меньше чем 2π. Докажите, что в этом многограннике есть *гамильтонов цикл*: то есть что жук может проползти по некоторым рёбрам многогранника так, чтобы побывать в каждой вершине ровно по разу и вернуться в исходную точку. *Мерой* телесного угла называется площадь куска, отъедаемого этим углом от единичной сферы с центром в вершине угла. Площадь поверхности всей единичной сферы равна 4π.

3. В узлах целочисленной прямоугольной решётки расставлено конечное количество автомобилей, каждый из которых занимает отдельный узел и смотрит в одно из четырёх направлений. Известно, что узел перед каждой машиной (то есть следующий узел по её направлению) свободен и никакие два автомобиля не смотрят друг на друга. За один ход можно передвинуть машину на следующий по её направлению узел. Автомобили не могут оказываться в одном узле. Докажите, что можно делать ходы таким образом, чтобы каждая машина передвигалась бесконечно много раз.

4. In a country with n cities, some pairs of cities are connected by one-way flights operated by one of two companies A and B. Two cities can be connected by more than one flight in either direction. An AB-word w is called *implementable* if there is a sequence of connected flights whose companies' names form the word w. Given that every AB-word of length 2^n is implementable, prove that every finite AB-word is implementable. (An AB-word of length k is an arbitrary sequence of k letters A or B; e.g. $AABA$ is a word of length 4.)

5. Правильный p-угольник P и правильный q-угольник Q, не имеющие общих вершин, вписаны в одну и ту же окружность. Окружность разбита $p+q$ вершинами многоугольников P и Q на $p+q$ дуг. Докажите, что можно вписать в окружность правильный $(p+q)$-угольник так, что на каждой из дуг оказалась ровно одна из его вершин.

6. Дано целое число $N \geqslant 2$. Команда, состоящая из $N(N+1)$ футболистов, любые два из которых разного роста, построена в ряд. Тренер хочет удалить из ряда $N(N-1)$ игроков так чтобы для оставшегося ряда из $2N$ игроков выполнялись следующие N условий:
(1) никто не стоит между двумя самыми высокими игроками,
(2) никто не стоит между третьим и четвертым по росту игроками,
...
(N) никто не стоит между двумя самыми низкими игроками.
Докажите, что это всегда возможно.