

Быстрый поиск идей
04 января 2023 г.

1. Дан изначально белый квадрат 10×10 . Два игрока поочерёдно закрашивают области внутри квадрата: первый игрок — квадратики 2×2 , второй — уголки из трёх клеток. Нельзя закрашивать клетку дважды. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Начинает первый. Кто выигрывает при правильной игре?

2. По кругу расставлены $2n$ чисел ($n > 1$), каждое из которых равно либо 3, либо 11, либо 20. Известно, что любые два соседних числа различны. Докажите, что если обозначить числа в порядке обхода круга через a_1, a_2, \dots, a_{2n} , то

$$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - \dots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_1 = 0.$$

3. Даны $2n$ гирек попарно различных положительных весов. За одну операцию разрешается сравнить веса любых двух гирь. Можно ли за $3n - 2$ операции найти и самую лёгкую, и самую тяжёлую гирию?

4. В ряд стоят 10 новобранцев. За одну команду разрешается поменять двух рядом стоящих новобранцев местами. Можно ли за 64 команды сделать так, чтобы в процессе выполнения команд каждый новобранец побывал на всех местах?

5. Натуральные числа m и n взаимно просты и больше 1. Докажите, что существуют натуральные числа a, b, c такие, что $m^a = 1 + n^b c$, причём n и c взаимно просты.

6. Можно ли замостить всё пространство равными тетраэдрами, все грани которых — прямоугольные треугольники?

7. Квадрат 300×300 разрезан на прямоугольники 1×3 . В каждом вертикальном прямоугольнике написан номер столбца, содержащего этот прямоугольник. Докажите, что сумма написанных чисел делится на 3.

8. Существует ли такой многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами степени больше 1, что для любого просто числа p среди остатков чисел $P(0), P(1), P(2), \dots, P(p-1)$ при делении на p встречаются все значения $0, 1, 2, \dots, p-1$?